

Microjikai concept

—Concepts triggered by the study of QSO

Bao Xuexing

Wenzhou City Housing Fund Management Center, comprehensive archives, Wenzhou City, Zhejiang

Email: bao@wz.zj.cn; 592519806@qq.com

Abstract

A new concept of microjikai is created by author in solving the problem of quasars. This paper introduces its creating background, and the related new concepts -- microsquare, micrologarithm, microroot, definitejikai, microsquare equation, micrologarithm equation, microroot equation etc. And the applications of these concepts in the fields of physics, astrophysics, dynamic geometry, finance, population statistics will show its advantage of high efficiency.

1. Discusses the solution it is solve dimensional crisis of logarithm.
2. Based on the theory of relativity, it can be strictly proved that the gravitational

redshift is that

$$z_y = -\frac{\Delta v}{v_0} = 1 - \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right)$$

$$= \left(\frac{GM}{c^2 R}\right) - \frac{1}{2!}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^3 - \frac{1}{4!}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^k + \dots,$$

the original general relativity gravitational redshift formula is a first-order approximate formula under weak gravitational. According to the theory of solving the verification of quasars SDSS DR7 data, to make the quasar Hertzsprung Russell diagram, a gap can be found in the dense quasar region. And the gap parameters should be similar to divide both sides of the quasar parameters, but the quasars do not fall into the gap, it is worth deep analysis of astronomers.

Keywords

micrologarithm; microsquare equation; interest rate; population growth rate; redshift; gravitational redshift quasars

Subject Areas: Math & Physics

微积开概念

——由类星体研究引发的概念

包学行

温州市住房公积金管理中心，浙江，温州市

Email: bao@wz.zj.cn; 592519806@qq.com

收稿日期：2016年8月11日；发布日期：2016年8月12日

摘要

1. 微积开概念为作者在求解类星体问题中产生，本文介绍其产生背景，介绍了微积开的基本概念——微开、微对数、微根、定积开、微开方程、微对数方程、微根方程等，以及这些概念在物理、天体物理、动态几何、金融、人口统计等领域的意义与应用例子，在这些例子中微积开概念的优越性表现为联系问题的高效率。

2. 论述了对数量纲危机的解决办法。

3. 在相对论基础上严格地论证了引力红移应为（下式中 k 为自然数）

$$z_y = -\frac{\Delta v}{v_0} = 1 - \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right)$$
$$= \left(\frac{GM}{c^2 R}\right) - \frac{1}{2!}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^3 - \frac{1}{4!}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^k + \dots,$$

原广义相对论引力红移公式是弱引力下的一阶近似公式。按本文的理论求解验证类星体 SDSS DR7 等数据，作出的类星体赫罗图，在密集类星体区域中却有一条**鸿沟**，鸿沟的参数应与鸿沟二侧的类星体参数相近，但类星体却不会落入鸿沟，且两岸类星体光谱特性有**明显差异**，值得天文学家深入分析。

关键词

微对数；微开方程；利率；人口增长率；红移；引力红移；类星体

目录链接

(点以下文中任一标题都可链接至目录)

0. 引言

微积分概念作为一种新的数学概念，其生命力在于：对适用问题的联系实际问题的效率。微积分概念就是在研究类星体问题中产生。

微积分概念的产生至今已有四十多年了，虽然 [潜科学网站](#) 等曾经推荐介绍微积分概念，但是目前仍很少有人知道微积分概念的意义。因此，想通过本文把微积分概念介绍给大家。微积分概念的产生与我接触问题与学习知识的 **序列** 有关。微积分概念萌芽产生于作者学习高等数学之前，绝大部分的微积分概念产生于作者学习高等数学的过程中。如果在大学毕业后才接触同样的问题，也许作者就不会产生微积分概念了。

1. 微积分概念的产生

1.1. 微对数概念的萌芽

这是作者学习高等数学之前的事。1975 年的一天，作者看到了《物理学的未知世界》一书，其中一段关于类星体的描述吸引了作者，当时作者曾将此段摘录于作者的笔记本上：

宇宙扩张 红移规律使我们能够精确地计算出……，计算结果是，星系间的距离每增加 10^{24} 厘米，离散速度每秒钟就加快 55 公里。

当时作者还未找到计算星系距离与红移量的关系的哈勃定律计算式，因为很想马上算一算星系距离与红移量的关系，因此作如下推导：

设星光传播单位时间后，光子的能量有一非常微小的损耗率 b ，也就是星光经传播单位时间后能量变化倍率（剩余率）为 $1-b$ 。若星系距离为 r ，光速为 c ，那么光子传播经历的时间为 r/c 。若 E_0 为光子从光源发出时具有的能量， E 为被观测时光子的能量值，那么星系距离 r 与光子能量变化的关系为

$$\frac{E}{E_0} = (1-b)^{\frac{r}{c}}, \quad (1.1.1)$$

红移量的定义为^[1]

$$Z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \quad (1.1.2)$$

红移量为 Z 的星光从发出至传播到地球其能量的变化倍率为

$$\frac{E}{E_0} = \frac{h\nu}{h\nu_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{c/\lambda}{c/\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda_0}} = \frac{1}{\frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}} = \frac{1}{1+Z}, \quad (1.1.3)$$

上式中 h 为普朗克常数， ν_0 与 λ_0 为光子的从星体发出时的频率与波长， ν 与 λ 为光子被观测时的频率与波长， $\Delta\lambda$ 为光子的波长变化量。

结合 (1.1.1) 式与 (1.1.3) 式，得

$$(1-b)^{\frac{r}{c}} = \frac{1}{1+Z}, \quad (1.1.4)$$

对上 (1.1.4) 式取以 $(1-b)$ 为底的对数，再乘以 c ，得距离 r 与红移量 Z 的关系为

$$r = c \log_{(1-b)} \left(\frac{1}{1+Z} \right). \quad (1.1.5)$$

上式中的 b 为一个远小于 1 非常微小的数, 因此这是一种**微对数**概念的萌芽。但当时作者仅意识到这是一种普通的对数概念。

上述的推导是为了让大家了解 (1.1.5) 式的来历原理, 如果脑中有了这种对数的概念, 并已了解这些量的意义, 是不必列出 (1.1.1) 式与 (1.1.4) 式就可直接写出 (1.1.5) 式的。作者当时就是由对数概念直接写出 (1.1.5) 式的。

后来找到了哈勃定律计算式后, 才知哈勃定律与作者的上 (1.1.5) 式不一样。作者当时还未学过对数换底公式, 因此就将上式原封不动地写信告诉了紫金山天文台。紫金山天文台恒星室回信告诉作者, 他们对此式非常感兴趣, 因为他们已用大量的类星体数据对该式作了验证。

后来作者也就此请教几位热心自然科学的朋友, 他们说这个问题他们是用**微分方程**解的, 你怎么用**初等数学的对数**方法解出了, 他们用微分方程再解了一次这个问题, 并用对数换底公式将作者的公式换底后, 并设

$$H = -\ln(1-b), \quad (1.1.6)$$

得二者结果**吻合**为 (详见本文的[附录 1 用微分方程解距离红移问题](#)):

$$r = -\frac{c}{\ln(1-b)} \ln(1+Z) = \frac{c}{H} \ln(1+Z). \quad (1.1.7)$$

此后作者就开始自学高等数学。后来, 作者用幂级数展开 (1.1.7) 式, 得^[2]

$$r = \frac{c}{H} Z - \frac{c}{2H} Z^2 + \frac{c}{3H} Z^3 - \frac{c}{4H} Z^4 + \dots \quad (1.1.8)$$

在 $Z \ll 1$ 时, 忽略高次项保留一次项后 (1.1.8) 式即简化为哈勃定律, 即

$$r = \frac{c}{H} Z. \quad (1.1.9)$$

忽略高次项会引起把 星系类 天体距离确定偏远, 把各星系的间距确定偏高, 误把星系质量确定偏高。

中国科技大学天体物理组的一篇关于类星体统计分析的论文中, 他们得出的结论为: 红移量与距离的关系是^[3]

$$r \propto Z - 0.19Z^2, \quad (1.1.10)$$

在 $Z > 1$ 时与哈勃的线性关系有明显的偏差。

在比较了 (1.1.8) 式展开式系数与 (1.1.10) 式系数的差异后, 使作者意识到类星体的红移量 Z 中不仅仅只包含与**距离有关**的红移量, 而且还包含与**引力有关**的红移量, 只有分离出**引力红移**后, 才能得出**正确的类星体距离**。否则将会**误将类星体的质能定得不可理解, 误出难以理解的暗物质来**。

于是作者就要寻找引力红移公式, 但手头一时找不到, 只好自己推导, 结果在推导中产生了**定积开** (它不是定积分) 概念。

正是产生微积开概念过程, 使作者找到了一种从类星体红移量 Z 中分离出**距离红移量**与**引力红移量**的方法。

1.2. 定积开概念的产生

为了自己推导天体的引力红移公式, 作者的思路是这样的: 按**相对论**的质能关系, 具有能量 $h\nu$ 的光子应具有质量 $m = h\nu/c^2$, h 为普朗克常数, ν 为光子频率。那么一个质量为 m 的光子脱离质量为 M ,

尺度半径为 R 的天体的表面至 ∞ 远处必得做功消耗能量而引起光谱红移，对于恒星发出的光子脱离其引力时，引力红移是很小的，因此光子质量 m 的变化也很小，先近似地设 m 为常量，设 G 为万有引力常数， $R \leq r \leq \infty$ ， r 为光子传播路径上光子与星体中心的距离，那么光子脱离恒星，因做功的消耗，光子的能量变化量为（下式中的负号为引力方向与光子运动方向相反而加）

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta \nu h \approx \int_R^\infty -\frac{GMm}{r^2} dr \\ &= \int_R^\infty -\frac{GMh\nu}{r^2 c^2} dr \\ &= -\frac{GMh\nu}{c^2} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= -\frac{GMh\nu}{c^2} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty \\ &= -h\nu \frac{GM}{Rc^2},\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

恒星的引力红移可使用广义相对论的习惯的定义表示为

$$\begin{aligned}z_y &= \frac{\nu_0 - \nu'}{\nu_0} = \frac{-(\nu' - \nu_0)}{\nu_0} = \frac{-\Delta \nu}{\nu_0} \\ &\approx \frac{-\Delta \nu}{\nu} = \frac{-\Delta \nu h}{\nu h} = \frac{-\Delta E}{h\nu},\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

它与天文学的**红移量 z 定义式 (1.1.2)** 不一样，因此，本文用小写字母 z 表示使用广义相对论的习惯定义的红移，加足标 y 后 z_y 表示为引力红移。将 (1.2.1) 式代入，得

$$z_y = \frac{-\Delta \nu}{\nu_0} \approx \frac{-\Delta \nu}{\nu} = -\frac{-h\nu \frac{GM}{Rc^2}}{h\nu} = \frac{GM}{Rc^2},\tag{1.2.3}$$

(1.2.3) 式与广义相对论的引力红移公式最终引用计算式是一致的^[4]。这使作者意识到广义相对论的引力红移公式 {即式 (1.2.3)} 仅是一条适用于弱引力红移的公式，因为在作者推导 (1.2.3) 式时近似设光子的质量 m 为常量。当一个光子脱离强引力场时，光子的质量变化很大，不能把光子质量作常量处理，所以 (1.2.3) 式不适用于强引力红移。

因此作者就考虑要计算光子 m 在变化过程中对 (1.2.1) 式的积分。这本是一个用微分方程解的问题，但作者当时还未自学到微分方程部分，用定积分又解不出了。作者就用如下的方法解决了这个问题：

设 $m = h\nu/c^2$ 为光子的瞬时质量， ν 为光子在 r 处时的瞬时频率，那么光子在距星体中心 r 处再远离至 $r + dr$ 处，在这 dr 路程中引力对光子做功为

$$dE = -\frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GM}{r^2} \frac{h\nu}{c^2} dr = -\frac{GMh\nu}{c^2 r^2} dr,\tag{1.2.4}$$

上式中的负号为引力的方向与光子的运动方向相反而加，在 $r + dr$ 处剩余的能量为

$$E + dE = h\nu - \frac{GMh\nu}{c^2 r^2} dr,\tag{1.2.5}$$

传播距离 r 得增量 dr 后，能量变化倍率（比率）为

$$\frac{E + dE}{E} = \frac{h\nu - \frac{GMh\nu}{c^2 r^2} dr}{h\nu} = 1 - \frac{GM}{c^2 r^2} dr,\tag{1.2.6}$$

设光子在星体表面的频率为 ν_0 ，星体半径为 R ，那么光子脱离星体表面至 ∞ 处它的能量将变为

$$\begin{aligned}
 E' &= h\nu' \\
 &= h\nu_0 \left(1 - \frac{GM}{c^2(R+dr_1)^2} dr\right) \left(1 - \frac{GM}{c^2(R+dr_1+dr_2)^2} dr\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{GM}{c^2(R+dr_1+dr_2+dr_3)^2} dr\right) \left(1 - \frac{GM}{c^2(R+dr_1+dr_2+dr_3+dr_4)^2} dr\right) \\
 &\quad \dots\dots,
 \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

上式中的足标表示变量在各时点上的值，用连乘积符号可把上式表示为

$$\begin{aligned}
 E' = h\nu' &= h\nu_0 \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta r_i \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_i^2} \Delta r_i\right), \\
 r_1 &= R, \quad r_n \rightarrow \infty, \quad \Delta r_i = r_{i+1} - r_i,
 \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

这就产生了一种和定积分有点类同的运算，定积分计算的是无穷多项的和，而 (1.2.8) 式计算的是无穷多个因子的积。作者当时把这种运算叫做乘积分，并把上述 (1.2.8) 式记作

$$E' = h\nu' = h\nu_0 \underset{R}{\int}^{\infty} 1 - \frac{GM}{c^2 r^2} dr. \tag{1.2.9}$$

并证明了计算乘积分的通用公式为

$$\underset{a}{\int}^b 1 + f(x) dx = \exp \int_a^b f(x) dx. \tag{1.2.10}$$

因此求得 (1.2.9) 式的值为

$$\begin{aligned}
 E' = h\nu' &= h\nu_0 \underset{R}{\int}^{\infty} 1 - \frac{GM}{c^2 r^2} dr = h\nu_0 \exp \int_R^{\infty} -\frac{GM}{c^2 r^2} dr \\
 &= h\nu_0 \exp \left[\frac{GM}{c^2 r} \right]_R^{\infty} = h\nu_0 \exp \left[-\frac{GM}{c^2 R} \right],
 \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

对上式两边除 $h\nu_0$ 得

$$\frac{\nu'}{\nu_0} = \exp \left(-\frac{GM}{c^2 R} \right), \tag{1.2.12}$$

那么引力红移为

$$z_y = \frac{\nu_0 - \nu'}{\nu_0} = 1 - \frac{\nu'}{\nu_0} = 1 - \exp \left(-\frac{GM}{c^2 R} \right), \tag{1.2.13}$$

用 (1.2.13) 式，作为建立类星体方程组中的一条方程，分离了类星体的红移量中的引力分量后，得到类星体距离与星系距离为同一数量级，分析各项数据进行验证显示其比大爆炸理论合理，详细请参阅“附录 2 类星体的本质 (验证 1)”文。近年又用类星体 SDSS DR7 数据作进一步的验证，进一步显其比大爆炸理论合理，详细请参阅“附录 3 类星体在赫罗图上的分族特性——类星体的本质 (验证 2) 简介”一文。

将 (1.2.13) 式展开为幂级数, 得^[5]

$$z_y = \frac{\Delta v}{v_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^k$$

$$= \left(\frac{GM}{c^2 R} \right) - \frac{1}{2!} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^3 - \frac{1}{4!} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^4 + \frac{1}{5!} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^5 + \dots, \quad (1.2.14)$$

对于恒星, 在 $GM/(c^2 R)$ 很小时, 忽略高次项, 保留一次项即得到广义相对论的**引力红移公式** (1.2.3)。如太阳的引力红移用 (1.2.3) 式求得值为 $2.1215165067121 \times 10^{-6}$, 而 (1.2.14) 式求得值为 $2.1215142562703 \times 10^{-6}$, 二者在前 5 位有效数值内无区别, 第 6 位有效数起才有差别。

但对于类星体、脉冲星等强引力天体忽略高次项后, 与实际情况会偏差很大, 应用广义相对论的**引力红移公式**会很纠结; 例如, 黑洞理论中“黑洞”应属定义为强引力天体, 但却不能恰当地把广义相对论的**引力红移公式** (及后来强调的施瓦西引力红移公式) 应用于其中。

为了把引力红移 (1.2.13) 式化为用天文习惯的红移量表示, 作如下变换

$$z_y = \frac{v_0 - v'}{v_0} = \frac{\frac{c}{\lambda_0} - \frac{c}{\lambda'}}{\frac{c}{\lambda_0}} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda'} = 1 - \frac{1}{\frac{\lambda'}{\lambda_0}} = 1 - \frac{1}{\frac{\lambda_0 + \lambda' - \lambda_0}{\lambda_0}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0}} = 1 - \frac{1}{1 + Z_y} = \frac{Z_y}{1 + Z_y} = 1 - \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right), \quad (1.2.15)$$

即

$$\frac{Z_y}{1 + Z_y} = 1 - \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right), \quad (1.2.16)$$

移项, 得

$$\frac{1}{1 + Z_y} = \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right), \quad (1.2.17)$$

二边取对数, 再乘 -1, 得

$$\ln(1 + Z_y) = \frac{GM}{c^2 R}. \quad (1.2.18)$$

1.3. 微开方程概念的产生

后来作者分析了定积分与**乘积分**的关系, 发现**乘积分**更确切应叫一个与**定积分**对应的名称**定积开**, 并有四种不同类型的**定积开**; 因为与**微分**对应**微开**有四种主要的型式, 与**微商 (导数)**对应**微对数**及**微根**二种, 与**不定积分**对应**不定积开**, 与**微分方程**对应的**微开方程**有二种, 一种为**微对数方程**, 一种为**微根方程**。

我们都知道导数 (微商) 为**常数**的问题, 如恒速运动的位移与时间的关系可用**乘法**计算, 逆运算用**除法**; 导数 (微商) 为**非常数**的问题, 如变速运动位移与时间的关系可用**定积分**计算。

上述作者求解的类星体的红移量与距离公式及引力红移量公式问题, 对应地为:

微对数为**常数**的问题，如类星体的红移量与距离关系中，红移量与时间的关系可用**乘方**计算，逆运算用**对数**；微对数为**非常数**的问题，如引力红移公式可用**定积开**计算。归结如下（表 1）。

表 1 微商与微对数对应表

	常数	非常数
微商	$S = vt, v = S/t, t = S/v$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$
微对数	$\frac{1}{1+Z} = (1-b)^{\frac{r}{c}},$ $(1-b) = \left(\frac{1}{1+Z}\right)^{\frac{c}{r}},$ $r = c \log_{(1-b)}\left(\frac{1}{1+Z}\right).$	$E' = hv' = hv_0 \int_R^{\infty} \left(1 - \frac{GM}{c^2 r^2}\right) dr$

作者当时想：类星体的红移量与距离公式及引力红移公式问题在微积分中是用微分方程解的问题，在微积开概念中都不用方程解，那么微积开概念中的**微开方程**将可解什么问题呢？正在作者百思不得其解的时候，一个巧遇使作者得到了第一个线索。

因作者的父亲数学较好，他退休后仍为《温州医学院学报》审稿，这天他正在审一篇有关统计的稿件，桌上正摊开一本参考书《卫生统计学》，翻在**人口增长率**的定义这一页上，作者发现人口增长率的定义就与**微对数**相关。

于是作者设想一个封闭域中的人口演化与阻尼弹簧振子或 RLC 充放电电路应有对应关系。弹簧振子或 RLC 充放电电路的描述二阶微分方程为

$$my'' + Ky' + ky = f, \tag{1.3.1}$$

与

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = u, \tag{1.3.2}$$

而一个封闭域中的人口演化可由二阶微根方程描述，即

$$\left(R^{2\wedge}\right)^{k_3} \cdot \left(R^\wedge\right)^{k_2} \cdot R^{\frac{1}{C}} = F_0. \tag{1.3.3}$$

(详见下文介绍)。

2. 微积开的基本概念

2.1. 增率

增率是与增量对应的一种概念。

2.1.a 增率的定义

设函数 $y = f(x) > 0$ ，它在 x 点的某邻域上有定义，在该邻域内当 x 得到增量 Δx 时，则增率为

$$\nabla y = \frac{f(x + \Delta x)}{f(x)}. \quad (2.1a1)$$

2.2. 微对数

微对数是与微商（导数）对应的一种概念。

2.2.a 微对数的定义

设函数 $y = f(x) > 0$ ，它在点 x_0 处若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{1+\Delta x} \nabla y_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{f(x_0)}. \quad (2.2a1)$$

存在，则此极限就称作 $f(x)$ 在点 x_0 处的微对数，记作

$$\begin{aligned} y^\vee \Big|_{x=x_0} &= f^\vee(x_0) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{1+\Delta x} \nabla y_0 \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{f(x_0)}. \end{aligned} \quad (2.2a2)$$

如果每一个值 $x_0 \in D_f$ 都唯一确定一个值 $f^\vee(x_0)$ ，则 $f(x)$ 的微对数仍为定义在 D_f 域上的 x 的函数，记作

$$\begin{aligned} y^\vee = f^\vee(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{1+\Delta x} \nabla y \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f(x + \Delta x)}{f(x)}. \end{aligned} \quad (2.2a3)$$

叫做 $f(x)$ 的微对数函数，不过通常仍把 $f^\vee(x_0)$ 与 $f^\vee(x)$ 统称为微对数。

定理 1 设 $f'(x)$ 存在，且 $f(x) \neq 0$ ，则 $f^\vee(x)$ 存在，并有

$$f^\vee(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (2.2a4)$$

定理 1 证明 根据微对数的定义有 $f(x) > 0$ ，则

$$\begin{aligned} f^\vee(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x + \Delta x) - \ln f(x)}{\ln(1 + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x + \Delta x) - \ln f(x)}{\frac{\Delta x}{\Delta x} \ln(1 + \Delta x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x + \Delta x) - \ln f(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1 + \Delta x)} \\
&= \frac{[\ln f(x)]'}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left[(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} \right]} \\
&= \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} \right]} \\
&= \frac{f'(x)}{f(x)} \div \ln e \\
&= \frac{f'(x)}{f(x)}.
\end{aligned} \tag{2.2a5}$$

因为 $f'(x)$ 存在, 并 $f(x) \neq 0$, 所以 $f^\vee(x)$ 存在。证毕。

2.2.b 微对数在人口统计学中的意义

人口增长率 ZL 的定义为^[6]

$$ZL = \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\frac{1}{2}[R(t) + R(t + \Delta t)]} \div \Delta t, \tag{2.2b1}$$

上式中规定 Δt 取一年, $R(t)$ 为在时间 t 时的人口数。

如果人口增长率是时间 t 的函数, 要考虑瞬时人口增长率 SZL, 则对 (2.2b1) 式求 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限, 得瞬时人口增长率

$$\begin{aligned}
SZL &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\frac{1}{2}[R(t) + R(t + \Delta t)]} \div \Delta t \right\} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\frac{1}{2}[R(t) + R(t + \Delta t)]} \div \Delta t \right\} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t}}{\frac{1}{2}[R(t) + R(t + \Delta t)]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[R(t) + R(t + \Delta t)]}{2} \\
&= \frac{R'(t)}{R(t)} \\
&= R^\vee(t),
\end{aligned} \tag{2.2b2}$$

因此可知：**微对数**在人口统计学中的意义为**瞬时人口增长率**。

2.2.c 微对数在原子物理中的意义

我们知道高速粒子的运动质量为^[7]

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.2c1}$$

对上式求微对数，得

$$\begin{aligned}
m^\vee &= m^\vee(v) = \frac{m'(v)}{m(v)} \\
&= \frac{\left[m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]'}{m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{m_0 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(-2 \frac{v}{c^2}\right)}{m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\frac{v}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2}}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = \frac{v}{c^2 - v^2} = \frac{1}{\frac{c^2}{v} - v} \\
&= \frac{1}{V - v},
\end{aligned} \tag{2.2c2}$$

上式中的

$$V = \frac{c^2}{v}, \tag{2.2c3}$$

为德布罗意波的波速。

从 (2.2c2) 式可知, 粒子运动质量对运动速度的微对数为该粒子相关的德布罗意波的波速与该粒子运动速度差的倒数。这种关系隐含着粒子的一种什么特性呢? 作者对原子物理知道得太少了, 留给大家去思考吧。

2.2.d 微对数在动态几何中的意义

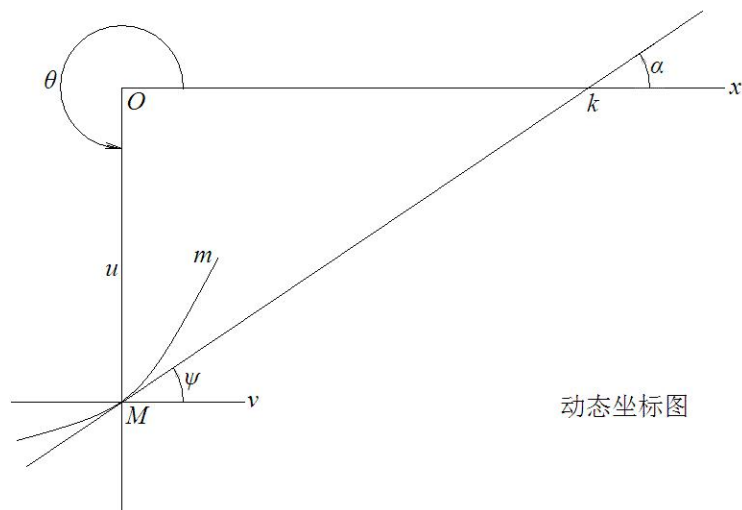


图 1 动态坐标图

在极坐标系中的轨迹 Mm 上任一点 M 的矢径为 OM , 轨迹 Mm 的极坐标方程为

$$r = r(\theta), \quad (2.2d1)$$

直角坐标系中的参数方程为

$$x = r(\theta)\cos\theta, \quad (2.2d2)$$

$$y = r(\theta)\sin\theta, \quad (2.2d3)$$

y 轴从原点 O 指向上方, (图 1) 中未画出。这条轨迹在 M 点的切线 Mk 与 Ox 轴的夹角为 α , 斜率为

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{r'(\theta) \cdot \sin\theta + r(\theta) \cdot \cos\theta}{r'(\theta) \cdot \cos\theta - r(\theta) \cdot \sin\theta} \\ &= \frac{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg}\theta + r(\theta)}{r'(\theta) - r(\theta) \cdot \operatorname{tg}\theta}, \end{aligned} \quad (2.2d4)$$

现有一个动态直角坐标系 vMu , M 为该动态直角坐标系的原点, 该原点 M 永远位于轨迹 Mm 上, 动态直角坐标系中的 u 轴永远指向直角坐标系 xOy 的原点 O 。在动态直角坐标系 vMu 中轨迹 Mm 在 M 点 (动态原点) 的切线 Mk 与 Mv 轴的夹角为 ψ , 在三角形 OMk 中有

$$(2\pi - \theta) + \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \alpha = \pi, \quad (2.2d5)$$

由上式解得

$$\psi = \frac{3\pi}{2} + \alpha - \theta, \quad (2.2d6)$$

那么, 在该动态直角坐标系 vMu 中轨迹 Mm 在 M 点的斜率为

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha - \theta \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta \right) \\ &= -\operatorname{ctg}(\alpha - \theta) = -\frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \theta}, \end{aligned} \quad (2.2d7)$$

因为

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad (2.2d8)$$

将 (2.2d4) 式代入上 (2.2d8) 式, 得

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{r'(\theta) - r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta}{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r(\theta)}, \quad (2.2d9)$$

将 (2.2d9) 式代入 (2.2d7) 式, 得

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= -\frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \theta} \\ &= -\frac{1 + \frac{r'(\theta) - r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta}{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r(\theta)} \cdot \operatorname{ctg} \theta}{\frac{r'(\theta) - r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta}{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r(\theta)} - \operatorname{ctg} \theta} \\ &= -\frac{\frac{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r(\theta) + r'(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta - r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{ctg} \theta}{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r(\theta)}}{\frac{r'(\theta) - r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta - r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{ctg} \theta - r(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta}{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r(\theta)}} \\ &= -\frac{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r(\theta) + r'(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta - r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{ctg} \theta}{r'(\theta) - r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta - r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{ctg} \theta - r(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta} \\ &= -\frac{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r(\theta) + r'(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta - r(\theta)}{r'(\theta) - r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta - r'(\theta) - r(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta} \\ &= -\frac{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r'(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta}{-r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta - r(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta} \\ &= -\frac{r'(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta + r'(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta}{-r(\theta) \cdot \operatorname{tg} \theta - r(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta} \\ &= \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} = r^\vee(\theta), \end{aligned} \quad (2.2d10)$$

由此可知极坐标中的轨迹方程 (2.2d1) 的微对数 $r^\vee(\theta)$ 即为动态坐标系 vMu 中该轨迹的斜率 (微商), 即

$$r^\vee(\theta) = \frac{du}{dv}. \quad (2.2d11)$$

2.2.e 微对数在其它学科中的意义简述

此外推导一下即可明白:

微对数在银行计息中的意义为利率;

微对数在放射性物质的衰变过程中的意义为衰变系数;

微对数在缆绳绕木桩牵力变化中的意义为力的衰变系数;

微对数在火箭动力学中的意义为燃料的消耗系数;

微对数在 RC 充放电电路中的意义为电路的 RC 时间参数, 如果 R 与 C 为都为常数的话, 为 RC 时间常数;

等等。

2.3. 微根

微根也是与微商 (导数) 对应的一种概念。

2.3.a 微根的定义

设函数 $y = f(x) > 0$, 它在点 x_0 处若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[\Delta x]{\nabla y_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[\Delta x]{\frac{f(x_0 + \Delta x)}{f(x_0)}} \quad (2.3a1)$$

存在, 则此极限就称作 $f(x)$ 在点 x_0 处的微根, 记作

$$\begin{aligned} y^\wedge|_{x=x_0} = f^\wedge(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[\Delta x]{\nabla y_0} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[\Delta x]{\frac{f(x_0 + \Delta x)}{f(x_0)}}. \end{aligned} \quad (2.3a2)$$

如果每一个值 $x_0 \in D_2$ 都唯一确定一个值 $f^\wedge(x_0)$, 则 $f(x)$ 的微根仍为定义在 D_2 域上的 x 的函数, 记作

$$\begin{aligned} y^\wedge = f^\wedge(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[\Delta x]{\nabla y} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[\Delta x]{\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)}}, \end{aligned} \quad (2.3a3)$$

叫做 $f(x)$ 的微根函数, 不过通常仍把 $f^\wedge(x_0)$ 与 $f^\wedge(x)$ 统称为微根。

定理 2 设 $f'(x)$ 存在, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $f^\wedge(x)$ 存在, 并有

$$f^\wedge(x) = \exp \frac{f'(x)}{f(x)} = \exp f^\vee(x). \quad (2.3a4)$$

定理 2 证明 根据微根的定义有 $f(x) > 0$, 则

$$f^\wedge(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[\Delta x]{\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[\Delta x]{\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)}} \\
&= \exp \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \sqrt[\Delta x]{\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)}} \\
&= \exp \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x + \Delta x) - \ln f(x)}{\Delta x} \\
&= \exp \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\ln f(x)]' \\
&= \exp \frac{f'(x)}{f(x)} = \exp f^\vee(x), \tag{2.3a5}
\end{aligned}$$

因为 $f'(x)$ 存在, 并 $f(x) \neq 0$, 所以 $f^\wedge(x)$ 存在。证毕。

2.3. b 高价微根的定义

当 x 变动时 $f^\wedge(x)$ 仍为 x 的函数, 如果对 $f^\wedge(x)$ 再求一次微根 $[f^\wedge(x)]^\wedge$ (如果存在的话) 就称为 $f(x)$ 的二价微根, 记为

$$f^{2\wedge}(x) = [f^\wedge(x)]^\wedge. \tag{2.3b1}$$

一般地, 我们定义 n 阶的微根为 $(n-1)$ 阶微根的微根, 即

$$f^{n\wedge}(x) = [f^{(n-1)\wedge}(x)]^\wedge. \tag{2.3b2}$$

定理 3 如果函数 y 的 n 阶微根存在, 则有

$$y^{n\wedge} = \exp[(\ln y)^{(n)}]. \tag{2.3b3}$$

定理 3 证明 $n=1$ 时, 由定理 2 知

$$y^\wedge = \exp \frac{y'}{y} = \exp[(\ln y)'], \tag{2.3b4}$$

定理 3 成立。设 $n=k$ 时, 定理 3 也成立, 则有

$$y^{k\wedge} = \exp[(\ln y)^{(k)}]. \tag{2.3b5}$$

那么当 $n=k+1$ 时, 则有

$$\begin{aligned}
y^{(k+1)\wedge} &= [y^{(k)\wedge}]^\wedge \\
&= \exp \frac{[y^{(k)\wedge}]'}{y^{(k)\wedge}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \frac{\left\{ \exp \left[(\ln y)^{(k)} \right] \right\}'}{\exp \left[(\ln y)^{(k)} \right]} \\
&= \exp \frac{\exp \left[(\ln y)^{(k)} \right] \cdot \left[(\ln y)^{(k)} \right]'}{\exp \left[(\ln y)^{(k)} \right]} \\
&= \exp \left[(\ln y)^{(k+1)} \right].
\end{aligned} \tag{2.3b6}$$

因此对于一切自然 n 定理 3 都成立。证毕。

2.3.c 微根在人口统计学中的意义

在 2.2.b 节中提到微对数 $R^\vee(t)$ 为人口增长率，而微根

$$R^\wedge(t) = \exp R^\vee(t), \tag{2.3c1}$$

微根 $R^\wedge(t)$ 与微对数 $R^\vee(t)$ 两者为正变相关，微根 $R^\wedge(t)$ 同样能反应人口增长的情况，因此给微根 $R^\wedge(t)$ 一个专门的名称叫做人口根率。

在物理学中质点位置 $x(t)$ 的微商 $x'(t)$ 为质点的运动速度，为反应速度的变化，可再对微商 $x'(t)$ 再求一次微商，即二阶微商 $x''(t)$ 为质点的加速度。

对应地，在人口统计学中可对人口根率 $R^\wedge(t)$ 再求一次微根，即二阶微根 $R^{2\wedge}(t)$ 来反应人口根率的变化情况，并给二阶微根 $R^{2\wedge}(t)$ 一个专门的名称叫做人口加根率。

2.4. 微开

微开为与微分对应的概念。

2.4.a 微开的定义

为了分析函数增率在瞬间的变化情况，对增率 (2.1a1) 式取

$$dx = \Delta x \rightarrow 0 \tag{2.4a1}$$

的极限，因 $f(x) > 0$ ，所以有

$$\begin{aligned}
\nabla y &= \frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \\
&= \exp \ln \frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \\
&= \exp \left[\ln f(x + \Delta x) - \ln f(x) \right],
\end{aligned} \tag{2.4a2}$$

根据增量与微分的关系^[8], 令 $u = \ln f(x)$, 则

$$\begin{aligned}
 & \ln f(x + \Delta x) - \ln f(x) \\
 &= \Delta u \\
 &= u' \Delta x + O(\Delta x) \\
 &= [\ln f(x)]' \Delta x + O(\Delta x) \\
 &= \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x + O(\Delta x) \\
 &= f^\vee(x) \Delta x + O(\Delta x),
 \end{aligned} \tag{2.4a3}$$

上式 (2.4a3) 中的 $O(\Delta x)$ 为高阶无限小, 将 (2.4a3) 式代入 (2.4a2) 式, 得

$$\nabla y = \frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} = \exp[f^\vee(x) \Delta x + O(\Delta x)], \tag{2.4a4}$$

当取 $dx = \Delta x \rightarrow 0$ 的极限, 忽略高阶无限小 $O(\Delta x)$, 得微开为

$$d_\vee y = \exp[f^\vee(x) dx] = \exp[f^\vee(x) dx], \tag{2.4a5}$$

我们把上式 (2.4a5) 叫做**微开的 exp 式**。

此外, 微开还可表示为

$$\begin{aligned}
 d_\vee y &= \exp[f^\vee(x) dx] \\
 &= \left\{ \left[1 + f^\vee(x) dx \right]^{\frac{1}{f^\vee(x) dx}} \right\}^{f^\vee(x) dx} \\
 &= \left[1 + f^\vee(x) dx \right]^{\frac{f^\vee(x) dx}{f^\vee(x) dx}} \\
 &= 1 + f^\vee(x) dx,
 \end{aligned} \tag{2.4a6}$$

即

$$d_\vee y = 1 + f^\vee(x) dx, \tag{2.4a7}$$

我们把上式 (2.4a7) 叫做**微开的和底式**。为什么叫做微开的**和底式**, 你把该和底式中看作有一个指数 1, 就不难理解了。

此外, 微开还可表示为

$$d_\vee y = \exp[f^\vee(x) dx]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[(1 + dx)^{\frac{1}{dx}} \right]^{f^\vee(x)dx} \\
&= (1 + dx)^{\frac{f^\vee(x)dx}{dx}} \\
&= (1 + dx)^{f^\vee(x)},
\end{aligned} \tag{2.4a8}$$

即

$$d_\vee y = (1 + dx)^{f^\vee(x)}, \tag{2.4a9}$$

我们把上式 (2.4a9) 叫做微开的指数。

此外，微开还可表示为

$$\begin{aligned}
d_\vee y &= \exp[f^\vee(x)dx] \\
&= \left\{ \exp[f^\vee(x)] \right\}^{dx} \\
&= [f^\wedge(x)]^{dx},
\end{aligned} \tag{2.4a10}$$

即

$$d_\vee y = [f^\wedge(x)]^{dx}, \tag{2.4a11}$$

我们把上式 (2.4a11) 叫做微开的底式。

此外，微开还可表示为其它形式在此不详述了。

2.5. 定积开

定积开是与定积分对应的概念，定积开有和底定积开、指定积开、底-指定积开、底定积开等几种定积开。

2.5.a 和底定积开的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$ ，用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b \tag{2.5a1}$$

把区间 $[a, b]$ 分为 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 其长度各是

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{2.5a2}$$

$\max \Delta x$ 表示小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中最大的一个的长度。在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i ，即

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{2.5a3}$$

作乘积

$$J_n = \prod_{i=1}^n [1 + f(\xi_i)\Delta x_i] \quad (2.5a4)$$

当每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 都无限缩小时的极限

$$J = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^n [1 + f(\xi_i)\Delta x_i] \quad (2.5a5)$$

存在, 则把此极限 J 叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的和底定积开, 记作

$$\sqrt[a]{\int_a^b 1 + f(x)dx} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^n [1 + f(\xi_i)\Delta x_i] \quad (2.5a6)$$

上式中的函数 $f(x)$ 称为被积函数, $1 + f(x)dx$ 称为被积表达式, 变量 x 称为积开变量, a 与 b 分别称为积开下限与积开上限, 区间 $[a, b]$ 称为积开区间。

2.5.b 和底定积开的计算

和底定积开的计算可通过以下的定理 4、定理 5 转化为定积分计算。

定理 4 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \neq 0$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的和底定积开存在, 和底定积开与定积分的关系为

$$\sqrt[a]{\int_a^b 1 + f(x)dx} = \exp \int_a^b f(x)dx. \quad (2.5b1)$$

定理 4 证明 因函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的连续, 那么根据闭区间连续函数有界性定理^[9], 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界。因 $f(x) \neq 0$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上不会过 x 轴, 一种情况为 $f(x) > 0$, 另一种情况为 $f(x) < 0$, 不管哪一种情况, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分都存在, 因此有

$$\begin{aligned} \sqrt[a]{\int_a^b 1 + f(x)dx} &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^n [1 + f(\xi_i)\Delta x_i] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} [1 + f(\xi_i)\Delta x_i] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left\{ [1 + f(\xi_i)\Delta x_i]^{\frac{f(\xi_i)\Delta x_i}{f(\xi_i)\Delta x_i}} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left(\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left\{ [1 + f(\xi_i)\Delta x_i]^{\frac{1}{f(\xi_i)\Delta x_i}} \right\} \right)^{\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} f(\xi_i)\Delta x_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \exp \left[\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} f(\xi_i) \Delta x_i \right] \\
&= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} f(\xi_i) \Delta x_i \right] \\
&= \exp \left[\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right] \\
&= \exp \int_a^b f(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.5b2}$$

证毕。

定理 5 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的和底定积开存在, 和底定积开与定积分的关系为

$$\sqrt{1 + f(x)} = \exp \int_a^b f(x) dx. \tag{2.5b3}$$

定理 5 证明 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的连续, 且 $f(x) \neq 0$, 这是定理 4 已证明了的情况。现设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ 共 n 个过 0 点 (与 x 轴的交点), 在这 n 个过 0 点处和底定积开的被积表达式

$$1 + f(x) dx = 1 + 0 dx = 1, \tag{2.5b4}$$

这些过 0 点对连乘积的值不产生作用。定积分的被积表达式

$$f(x) dx = 0 dx = 0, \tag{2.5b5}$$

这些过 0 点对定积分的 和值 也不产生作用。因此可把区间 $[a, b]$ 拆分 $n + 1$ 个能满足定理 4 的子区间 $[a, c_1], [c_1, c_2], [c_2, c_3], \dots, [c_n, b]$, 那么有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1 + f(x)} dx \\
&= \left[\exp \int_a^{c_1} f(x) dx \right] \left[\exp \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \right] \left[\exp \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx \right] \cdots \\
&\quad \cdots \left[\exp \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x) dx \right] \left[\exp \int_{c_n}^b f(x) dx \right] \\
&= \exp \left[\int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x) dx \right] \\
&= \exp \int_a^b f(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.5b6}$$

证毕。

2.5.c 和底定积开的应用

当微对数不为常数时的许多问题, 都可用定积开求解, 下面举 2 例:

2.5.c1 例 动态增利率存款本息的计算

设某 Shangzhao 银行推出一种服务于现代忙碌人群的动态增利率活期储蓄，利率为

$$k = K \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \right], \quad (2.5c1)$$

上 (2.5c1) 式中的 K 为上限利率，即 $k < K$ ，通常取 K 略低于当前最长期定期储蓄利率， τ 为存款存储的时间段长度， T 为时间常数，通常取小于最长期定期储蓄存期的三分之一，大于最长期定期储蓄存期的五分之一。

因此某 Shangzhao 银行定的动态增利率储蓄的日利率定为

$$k = 0.000074 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{500}\right) \right], \quad (2.5c2)$$

上 (2.5c1) 式中的 τ 为以日为单位的存款时间段长度。

表 2 动态利率储蓄与其它储蓄本息对照表

$\tau = t_2 - t_1$	$C(t_2)$	活期储蓄 利率 0.72	一年期储蓄 利率 1.98	三年期储蓄 利率 2.52	五年期储蓄 利率 2.79
1 个月	100.01	100.06	100.06	100.06	100.06
3 个月	100.06	100.18	100.18	100.18	100.18
6 个月	100.22	100.36	100.36	100.36	100.36
1 年	100.79	100.72	101.98	100.72	100.72
2 年	102.59	101.45	104.00	101.45	101.45
3 年	104.94	102.18	106.06	107.75	102.18
4 年	107.58	102.91	108.16	108.53	102.91
5 年	110.41	103.65	110.30	109.31	114.75
6 年	113.37	104.40	112.48	116.11	115.58
7 年	116.45	105.15	114.71	116.94	116.41
8 年	119.62	105.91	116.98	117.78	117.25
9 年	122.89	106.67	119.30	125.11	118.09
10 年	126.25	107.44	121.66	126.01	131.68
11 年	129.71	108.21	124.07	126.91	132.62
12 年	133.26	108.99	126.53	134.80	133.58
13 年	136.91	109.78	129.03	135.77	134.54
14 年	140.66	110.57	131.59	136.75	135.51
15 年	144.51	111.36	134.19	145.25	151.10
16 年	148.46	112.16	136.85	146.30	152.19
17 年	152.53	112.97	139.56	147.35	153.28
18 年	156.70	113.78	142.32	156.51	154.39
19 年	160.99	114.60	145.14	157.64	155.50
20 年	165.40	115.43	148.01	158.78	173.39

设 $t = t_1$ 时存入的存款为 $C(t_1)$, 任一时刻 t 存款将增值为

$$C = C(t), \quad (2.5c3)$$

存款存储时间段长度为

$$\tau = t - t_1, \quad (2.5c4)$$

由于利率 k 是一个变量, 我们可取很小的一个时间间隔 dt 计算一次存款的增值变化增长率, 即微分:

$$\begin{aligned} dC &= 1 + kdt \\ &= 1 + 0.000074 \left[1 - \exp\left(-\frac{t-t_1}{500}\right) \right] dt, \end{aligned} \quad (2.5c5)$$

那么可用和底定积开计算得到 $t = t_2$ 时存款将增值为

$$C(t_2) = C(t_1) \int_{t_1}^{t_2} 1 + 0.000074 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{500}\right) \right] dt. \quad (2.5c6)$$

设存入款 $C(t_1) = 100$ 元, (表 2) 列出存款时间 $\tau = t_2 - t_1$ 与 $C(t_2)$ 的关系。

2.5.c2 例 人口预测计算

由统计得出某地区 2002 年的人口数 $R(2002)$ 为 10^6 人, 2002 年初的人口增长率为 1.2×10^{-3} /年, 设其人口增长率以 2×10^{-5} /年² 的速率下降, 即动态人口增长率为

$$k = 1.2 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-5}(t - 2002), \quad (2.5c7)$$

求该地区至 2010 年的人口数 $R(2010)$ 。

解

$$\begin{aligned} R(2010) &= R(2002) \int_{2002}^{2010} 1 + kdt \\ &= 10^6 \int_{2002}^{2010} 1 + (1.2 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-5}t) dt \\ &= 10^6 \times \exp \int_{2002}^{2010} (1.2 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-5}t) dt \\ &= 10^6 \times \exp \left[1.2 \times 10^{-3}t - 10^{-5}t^2 \right]_{2002}^{2010} \\ &= 10^6 \times \exp(9.6 \times 10^{-3}t - 6.4 \times 10^{-4}) \\ &= 1.0103 \times 10^6 (\text{人}). \end{aligned} \quad (2.5c8)$$

2.5.d 底-指定积开与底定积开的定义

设函数 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$, $\psi(x) > 0$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b \quad (2.5d1)$$

把区间 $[a, b]$ 分为 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 其长度各是

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.5d2)$$

$\max \Delta x$ 表示小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中最大的一个的长度。在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i ，即

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.5d3)$$

作乘积

$$J_n = \prod_{i=1}^n [f(\xi_i)]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i}, \quad (2.5d4)$$

当每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 都无限缩小时的极限

$$J = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^n [f(\xi_i)]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i} \quad (2.5d5)$$

存在，则把此极限 J 叫做函数 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的底-指定积开，记作

$$\int_a^b f(x)^{\psi(x)dx} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^n [f(\xi_i)]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i}. \quad (2.5d6)$$

上式中的函数 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 统称为 **被积函数**， $f(x)$ 特称为 **被积底函数**， $\psi(x)$ 特称为 **被积指数函数**。

若在区间 $[a, b]$ 上 $\psi(x) = 1$ ，则 (2.5d6) 式变化为

$$\int_a^b f(x)^{dx} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^n [f(\xi_i)]^{\Delta x_i}. \quad (2.5d7)$$

特称这种定积开为**底定积开**。

2.5.e 底-指定积开的计算

底-指定积开可通过下面的定理 6 转化为定积分计算。

定理 6 设函数 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$ ，则

$$\int_a^b f(x)^{\psi(x)dx} = \exp \int_a^b \psi(x) \ln f(x) dx. \quad (2.5e1)$$

定理 6 的证明 因函数 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上连续，那么根据闭区间连续函数有界性定理，函数 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上有界，且 $f(x) > 0$ ，因此有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)^{\psi(x)dx} &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^n [f(\xi_i)]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i} \\ &= \exp \ln \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^n [f(\xi_i)]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \ln \left\{ [f(\xi_i)]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i} \right\} \\
&= \exp \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n [\psi(\xi_i)\Delta x_i] \{\ln [f(\xi_i)]\} \\
&= \exp \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \psi(\xi_i) \ln [f(\xi_i)] \Delta x_i \\
&= \exp \int_a^b \psi(x) \ln f(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.5e2}$$

证毕。

2.5.f 底定积开的应用

2.5.f1 例 波动利率的大额存款本息计算

现在的利率计算是以日为计息的最小时间段，这引起一些不合理的情况。

例如：A 客户早上八点到某银行存款 1000 万元，到次日下午五点取回这笔存款，可得到利息 197.26 元。而 B 客户在下午五点到某银行存款 1000 万元，到次日上午八点取回这笔存款，也可得到利息 197.26 元。显然 A 客户的存款对银行的贡献比 B 客户大多了，但他们得到的利息却是一样的，这就形成了不合理情况。

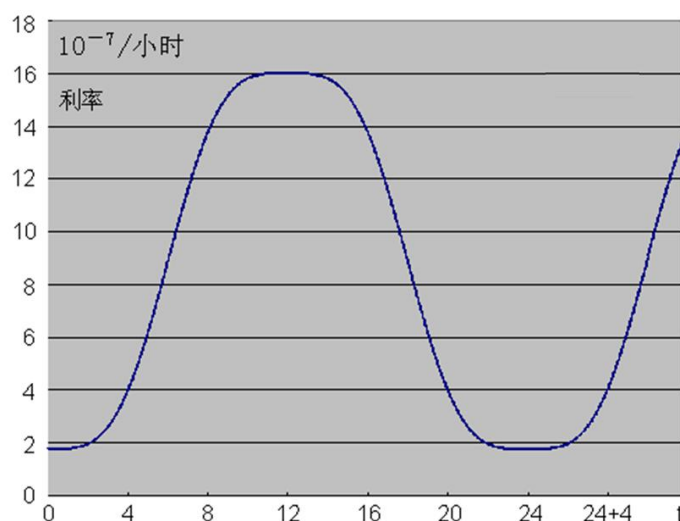


图 2 波动利率曲线

为了克服上述的不合理情况，设某 Shangzhao 银行推出一种波动利率的大额存款储蓄，其利率波动变化如下利率的函数表达式为

$$k(t) = \left[8.888 + 8 \left(\sin \frac{\pi(t-6)}{12} + \frac{1}{9} \sin \frac{\pi(t-6)}{4} \right) \right] \times 10^{-7}, \tag{2.5f1}$$

上 (2.5f1) 式中 $k(t)$ 的单位为: 小时⁻¹, 即小时利率, t 为以小时为计量单位的时间。利率函数图示如 (图 2)。

通常如果存款 C 存了三个时间段 τ_1 、 τ_2 、 τ_3 的利率分别为 k_1 、 k_2 、 k_3 则存款的复利的本息可由下式计算

$$\text{存款的本息} = C(1+k_1)^{\tau_1}(1+k_2)^{\tau_2}(1+k_3)^{\tau_3}. \quad (2.5f2)$$

因此, 波动利率的大额存款储蓄的本息为

$$\begin{aligned} C(t_2) &= C(t_1) \int_{t_1}^{t_2} [1+k(t)]^{dt} \\ &= C(t_1) \int_{t_1}^{t_2} \left\{ 1 + \left[8.888 + 8 \left(\sin \frac{\pi(t-6)}{12} + \frac{1}{9} \sin \frac{\pi(t-6)}{4} \right) \right] \times 10^{-7} \right\}^{dt}. \end{aligned} \quad (2.5f3)$$

由 (2.5f3) 式计算上述的 A 客户第二天得到的本息应为

$$\begin{aligned} &10000000 \int_8^{(24+17)} \left(1 + \left[8.888 + 8 \left(\sin \frac{\pi(t-6)}{12} + \frac{1}{9} \sin \frac{\pi(t-6)}{4} \right) \right] \times 10^{-7} \right)^{dt} \\ &= 10000286.27, \end{aligned} \quad (2.5f4)$$

B 客户第二天得到的本息应为

$$\begin{aligned} &10000000 \int_{17}^{(24+8)} \left(1 + \left[8.888 + 8 \left(\sin \frac{\pi(t-6)}{12} + \frac{1}{9} \sin \frac{\pi(t-6)}{4} \right) \right] \times 10^{-7} \right)^{dt} \\ &= 10000092.44, \end{aligned} \quad (2.5f5)$$

这样的计息, 因 A 客户存的时间段比 B 客户长, A 客户可比 B 客户多得 193.83(元) 的利息。如果要调高或调低波动利率的话只要调整 (2.5f1) 式中的系数 10^{-7} 即可, 例如调整为 1.042×10^{-7} , 或动态增利率等。

当波动利率与动态增利率结合使用, 称为动态利率。

2.5.g 底-指定积开的应用

2.5.g1 例 底-指定积开与几何平均值关系

连续函数的几何平均值定义为:

$$G(f) = \exp \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \right], \quad (2.5g1)$$

这种定义是用计算式来定义。几何平均值比较追根性的定义应为:

$$\begin{aligned} G(f) &= \sqrt[b-a]{\int_a^b f(x) dx} = \left[\int_a^b f(x) dx \right]^{\frac{1}{b-a}} \\ &= \exp \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \right], \end{aligned} \quad (2.5g2)$$

其含义为对函数的微开在被积区间的积开值由积开区间宽度去均方。

几何平均值也可用底-指定积开定义为

$$G(f) = \int_a^b f(x)^{\frac{1}{b-a}} dx, \quad (2.5g3)$$

更一般的加权几何平均值也可用底-指定积开定义为

$$G(f) = \int_a^b f(x)^{\psi(x)} dx, \quad (2.5g4)$$

上式中的 $\psi(x)$ 称为权重函数，它应满足

$$\int_a^b \psi(x) dx = 1. \quad (2.5g5)$$

以上介绍了和底定积开、底-指定积开与底定积开。除上述几种定积开外，还有其它形式的定积开，在此不详述了。

2.6. 微开方程

微开方程是与微分方程对应的概念，与微分方程对应的微开方程有二种，一种叫**微对数方程**，一种叫**微根方程**。

2.6.a 微对数方程的定义

凡表示未知函数和未知函数的微对数以及自变量之间关系的方程称为**微对数方程**。

以下介绍几种可求解的微对数方程及其通解，限于篇幅求解的过程就不介绍了。

2.6.b 可分离变量的微对数方程 可分离变量的微对数方程型如

$$y^\vee = f(x) \cdot g(y), \quad (2.6b1)$$

写作或

$$\log_{1+dx} dy = f(x) \cdot g(y), \quad (2.6b2)$$

微对数方程 (2.6b1) 或 (2.6b2) 的隐函数解为：

$$\int \frac{dy}{y \cdot g(y)} = \int f(x) dx. \quad (2.6b3)$$

2.6.c 一阶非齐次微对数方程

一阶非齐次微对数方程型如

$$y^\vee + Py = Q, \quad (2.6b4)$$

上方程 (2.6b4) 中的 P 、 Q 为 x 的函数，其通解为：

$$y = \frac{1}{\int P dx + e^{-\int Q dx} \cdot \int \left(-Q \cdot e^{\int Q dx} \cdot \int P dx \right) dx + C \cdot e^{-\int Q dx}}, \quad (2.6b5)$$

上 (2.6b5) 中的 e 为自然对数的底， C 为任意常数。

2.6.d 微根方程的定义

凡表示未知函数和未知函数的微根以及自变量之间关系的方程称为**微根方程**。

2.6.e n 阶 \log 线性微根方程的求解

n 阶 \log 线性微根方程的一般形式为

$$[y^{n\wedge}]^{p_n} \cdot [y^{(n-1)\wedge}]^{p_{n-1}} \cdot [y^{(n-2)\wedge}]^{p_{n-2}} \cdots [y^{2\wedge}]^{p_2} \cdot [y^\wedge]^{p_1} = f, \quad (2.6e1)$$

上方程 (2.6d1) 中 $p_n, p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_2, p_1, f$ 都为 x 的函数; 当 $f \equiv 1$ 时称该方程为齐次方程, 当 $p_n, p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_2, p_1$ 都为常数时称该方程为常指数微根方程。因为对该方程两边取对数, 可得到关于 $\log[y^{k^\wedge}]$ ($k=n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$) 的线性方程, 所以称该方程为 **log 线性微根方程**。与微根方程 (2.6d1) 对应的微分方程为

$$p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + p_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + p_2 y'' + p_1 y' = \ln f, \quad (2.6e2)$$

定理 7 如果 \bar{y} 是变系数 n 阶线性非齐次微分方程 (2.6e2) 的通解, 则 $\exp \bar{y}$ 是变指数 n 阶 **log 线性非齐次微根方程** (2.6e1) 的通解。

定理 7 证明 将定理 3 的 (2.3b3) 式代入 (2.6e1) 式, 得

$$\left\{ \exp \left[(\ln y)^{(n)} \right] \right\}^{p_n} \cdot \left\{ \exp \left[(\ln y)^{(n-1)} \right] \right\}^{p_{n-1}} \cdot \left\{ \exp \left[(\ln y)^{(n-2)^\wedge} \right] \right\}^{p_{n-2}} \dots \\ \dots \left\{ \exp \left[(\ln y)'' \right] \right\}^{p_2} \cdot \left\{ \exp \left[(\ln y)' \right] \right\}^{p_1} = f, \quad (2.6e3)$$

对方程 (2.6e3) 二边取对数, 得

$$p_n (\ln y)^{(n)} + p_{n-1} (\ln y)^{(n-1)} + p_{n-2} (\ln y)^{(n-2)} + \dots \\ \dots + p_2 (\ln y)'' + p_1 (\ln y)' = \ln f, \quad (2.6e4)$$

令

$$\bar{y} = \ln y, \quad (2.6e5)$$

代入上方程 (2.6e4), 得

$$p_n \bar{y}^{(n)} + p_{n-1} \bar{y}^{(n-1)} + p_{n-2} \bar{y}^{(n-2)} + \dots + p_2 \bar{y}'' + p_1 \bar{y}' = \ln f, \quad (2.6e6)$$

设 \bar{y} 已是方程 (2.6e6) 的通解, 则根据 \bar{y} 与 y 的关系则得变系数 n 阶线性非齐次微分方程 (2.6e2) 的通解为

$$y = \exp \bar{y}, \quad (2.6e7)$$

而方程 (2.6e6) 经 y 与 \bar{y} 的换元后即变为变系数 n 阶线性非齐次微分方程 (2.6e2), 所以定理 7 成立。证毕。

2.6.f 微根方程的应用

2.6.f1 人口统计中概念与物理概念的对应

在 2.3.c 微根在人口统计学中的意义一节中已提到:

微对数 $R^\vee(t)$ 在人口统计学中的意义为**人口增长率**, 微根 $R^\wedge(t)$ 与微对数 $R^\vee(t)$ 是正变相关的, 所以微根 $R^\wedge(t)$ 同样能反应人口变化情况, 因此给人口数 $R(t)$ 对时间的微根 $R^\wedge(t)$ 一个专门的名称叫**人口根率**。人口根率 $R^\wedge(t)$ 也会随时间变化, 为反应人口根率 $R^\wedge(t)$ 变化的情况, 可对人口根率 $R^\wedge(t)$ 再作一次对时间的微根求得二阶微根 $R^{2^\wedge}(t)$, 并把二阶微根 $R^{2^\wedge}(t)$ 称为**人口加根率**。

人口数 $R(t)$ 与物理学中的**位置** $x(t)$ 或**电荷** $q(t)$ 相对应。

人口根率 $R^\wedge(t)$ 与物理学中的**速度** $x'(t)$ 或**电流** $q'(t)$ 相对应。

人口加根率 $R^{2^\wedge}(t)$ 与物理学中的**加速度** $x''(t)$ 或**电流变化** $q''(t)$ 相对应。

2.6.f2 生态平衡“力”

我们假设跟物理学中的力对应，生态平衡中也存在一种“力”，它有如下的特征：

- 1) 这种“力”只有增长与抑制两个不同方向。
- 2) 设定“力” F 的方向后，取值于 $(1, +\infty)$ 区间表示“力”的“绝对”大小；若求得值 $F \in (1, +\infty)$ ，则说明该力与设定方向一致，若求得值 $F \in (0, 1)$ ，则说明该“力”与设定方向相反，该“力”的“绝对”大小为求得值的倒数。
- 3) 设定合成“力” F 的方向后，若分“力” F_{11} 、 F_{12} 、 F_{13} 、……、 F_{1n} 的设定方向与 F 一致，而分“力” F_{21} 、 F_{22} 、 F_{23} 、……、 F_{2n} 的设定方向与 F 相反，那么合成“力”为

$$F = \frac{F_{11} \cdot F_{12} \cdot F_{13} \cdot \dots \cdot F_{1n}}{F_{21} \cdot F_{22} \cdot F_{23} \cdot \dots \cdot F_{2n}}, \quad (2.6f1)$$

若上(2.6f1)式中

$$F = 1, \quad (2.6f2)$$

表示各分“力”相互抵消已取得平衡，二组分“力”相互抵消已取得平衡也可表示为

$$F_{11} \cdot F_{12} \cdot F_{13} \cdot \dots \cdot F_{1n} = F_{21} \cdot F_{22} \cdot F_{23} \cdot \dots \cdot F_{2n}. \quad (2.6f3)$$

2.6.f3 人口演化微根方程

在人类的人口演化中，可把影响人口变化的几个因素抽象为几个指数：

- 1) **环境指数** 生态环境容量 C 有限将抑制人口的增长，定义环境指数(为简化问题起见仅考虑环境为封闭域)

$$k_1 = \frac{1}{C}, \quad (2.6f4)$$

因为人口越多产生的抑制“力”就越大，所以环境产生的拒容“力”为

$$F_1 = [R(t)]^{k_1} = [R(t)]^{\frac{1}{C}}. \quad (2.6f5)$$

- 2) **社会作用指数** 把计划生育等一些因素抽象为一个**社会作用指数** k_2 ，因为计划生育最敏感的是**人口增长率**或**人口根率**，所以社会作用对人口增长的抑制“力”为

$$F_2 = [R^\wedge(t)]^{k_2}. \quad (2.6f6)$$

- 3) **思想保守指数** 计划生育作用对城市人口与农村人口就不一样，这表现为城市人口与农村人口素质的差异，把这种情况抽象为一个人群的**思想保守指数** k_3 ，保守素质总希望保持原人口增长率或人口增根率 $R^\wedge(t)$ 不变，因此产生对人口增根率 $R^\wedge(t)$ 的变化 $R^{2^\wedge}(t)$ 的逆反作用，其在抑制人口的作用的“力”为

$$F_3 = [R^{2^\wedge}(t)]^{k_3}. \quad (2.6f7)$$

上述的三种“力”的设定方向都为抑制。

- 4) **育龄指数与自然增长“力”** 通常生物在很少受到抑制因素作用时，出生率总是远高于死亡率的。人类自然生育有关的因素，主要与育龄人口有关，将其抽象为**育龄指数** k_0 ，设 t_u 为平均育龄，因育龄人口出生时的人群人口数 $R(t-t_u)$ 与人口增根率 $R^\wedge(t-t_u)$ 有关，所以由此产生的促使人口增长的“力”称为**自然增长“力”**，即

$$F_0 = [R(t-t_u) \cdot R^\wedge(t-t_u)]^{k_0}. \quad (2.6f8)$$

当上述四种“力”平衡时，根据“力”平衡条件有

$$F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 = F_0, \quad (2.6f9)$$

将 (2.6f5) 式、(2.6f6) 式、(2.6f7) 式、(2.6f8) 式代入上式，得人口演化的微根方程为

$$\left[R^{2\wedge}(t) \right]^{k_3} \cdot \left[R^\wedge(t) \right]^{k_2} \cdot \left[R(t) \right]^{k_1} = F_0, \quad (2.6f10)$$

或

$$\left[R^{2\wedge}(t) \right]^{k_3} \cdot \left[R^\wedge(t) \right]^{k_2} \cdot \left[R(t) \right]^{\frac{1}{C}} = F_0. \quad (2.6f11)$$

这个人口演化微根方程跟微分方程 (1.3.1) 与 (1.3.2) 有一种对应的对称性，大家自己比较一下就能发现。

3. 量纲危机及其解决

曾有读者认为微积分是一种新概念，其在纯数学上的推导也没有错误，但在应用在实际问题上量纲有矛盾。主要归结如下 3.1 与 3.2 二点：

2.1. 微对数的底数是否带量纲

微对数定义式

$$y^\vee = f^\vee(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}. \quad (3.1)$$

通常认为在很多实际问题中 Δx 是一个有量纲的量，而对数计算应是无量纲的。

2.2. 微对数概念萌芽问题中的量纲

在微对数概念的萌芽问题中， b 的量纲是 1/秒，是有量纲的量，用在对数式

$$r = c \log_{(1-b)} \left(\frac{1}{1+Z} \right). \quad (3.2)$$

而目前要求对数计算应是无量纲的。

上述这 2 个量纲问题困扰了作者很长时间，一个在数学上无错的问题，怎么会在量纲上存在问题呢？

2.3. 银行存款问题

对上述这 2 个问题可归结举一个大家都比较熟悉的例子，银行存款问题。

设存款的利率 $k = 0.032$ /年，存入本金 $Y_1 = 1$ 万元，要使取得本息 $Y_2 = 2$ 万元，需要的存期 T 为多长？用对数表达即

$$T = \log_{(1+k)} \left(\frac{Y_2}{Y_1} \right) = \log_{(1+0.032)} \left(\frac{2}{1} \right) \approx 22(\text{年}). \quad (3.3)$$

k (1/年)、 Y_1 (元)、 Y_2 (元)、 T (年) 都是有量纲的量，底数 $(1+0.032)$ 中的 1 与 k 应当同量纲为 (1/年)，那么底数 $(1+0.032)$ 量纲为 (1/年)，这与底数无量纲矛盾。所以目前都是对数计算先无量纲计算，计算结果还再还回量纲。这种处理是否很别扭？

这是因为人们从习惯的直线空间量纲转入不熟悉对数空间时量纲产生矛盾的**量纲回避解法**。

3.4. 量纲问题的解决

上述的银行存款问题是求如下方程的未知数 T ，即

$$Y_2 = Y_1(1+k)^T, \quad (3.4.1)$$

从方程 (3.4.1) 中可解得

$$\begin{aligned} (1+k) &= \left[\frac{Y_2(\text{元})}{Y_1(\text{元})} \right]^{\frac{1}{T(\text{年})}} \\ &= \left[\frac{Y_2(\text{元})}{Y_1(\text{元})} \right]^{\frac{1}{T(\text{年})}} = \left[\left(\frac{Y_2}{Y_1} \right)^{\frac{1}{T}} \right]^{\frac{1}{(\text{年})}}, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

可见 $(1+k)$ 有一个 $1/\text{年}$ 作指数的量纲。带这样量纲的话，代入方程 (3.4.1) 也正确

$$\begin{aligned} Y_2(\text{元}) &= Y_1(\text{元}) \left[(1+k)^{\frac{1}{(\text{年})}} \right]^{T(\text{年})} \\ &= Y_1(\text{元}) \left[(1+k)^{\frac{1}{T}} \right]^{\frac{1}{(\text{年})} \cdot T(\text{年})} = Y_1(1+k)^{\frac{1}{T}}(\text{元}), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

带这样量纲的话，代入方程 (3.4.1) 解的对数表达式 (3.3) 也可正确量纲分析

$$\begin{aligned} T(\text{年}) &= \log \left[\frac{Y_2(\text{元})}{Y_1(\text{元})} \right]^{\frac{1}{(1+k)^{\frac{1}{(\text{年})}}}} \\ &= \log \left[\frac{Y_2}{Y_1} \right]^{\frac{1}{(1+k)^{\frac{1}{(\text{年})}}}} = \frac{\ln \left(\frac{Y_2}{Y_1} \right)}{\ln \left[(1+k)^{\frac{1}{(\text{年})}} \right]} \\ &= \frac{\ln \left(\frac{Y_2}{Y_1} \right)}{\frac{1}{(\text{年})} \ln(1+k)} = \frac{\ln \left(\frac{Y_2}{Y_1} \right)}{\ln(1+k)} (\text{年}), \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

但又产生另一个问题， k 的量纲是 $(1/\text{年})$ ，怎么 $(1+k)$ 的量纲变为指数的 $(1/\text{年})$ 了？**怎么协调这种跳变呢？**

k 是利率，量纲是 $(1/\text{年})$ ， $(1+k)$ 中的 1 应与 k 同量纲也是 $(1/\text{年})$ ，并把这个 $(1/\text{年})$ 称为**基数**。那么，存款单位时间增率可定义为：

$$\text{存款单位时间增率} = \left(\frac{\text{基数} + \text{利率}}{\text{基数}} \right)^{\frac{1}{\text{单位时间}}}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{\text{单位时间}} + \frac{k}{\text{单位时间}}}{\frac{1}{\text{单位时间}}} \right)^{\frac{1}{\text{单位时间}}} = (1+k)^{\frac{1}{\text{单位时间}}}, \quad (3.4.5)$$

$(1+k)$ 为什么会消失分母量纲, 在以上的定义中可找到答案了。

3.5. 微对数概念的萌芽问题中的量纲分析

微对数概念的萌芽的问题中的量纲分析即为

$$\begin{aligned} r(\text{光年}) &= c(\text{光年/年}) \log_{\left[(1-b)^{\frac{1}{(\text{年})}} \right]} \left(\frac{1}{1+Z} \right) \\ &= c(\text{光年/年}) \frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln\left[(1-b)^{\frac{1}{(\text{年})}} \right]} = c(\text{光年/年}) \frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\frac{1}{(\text{年})} \ln(1-b)} \\ &= c \frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln(1-b)} \frac{(\text{光年/年})}{\frac{1}{(\text{年})}} = c \frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln(1-b)} (\text{光年}). \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

或者

$$\begin{aligned} r(\text{米}) &= c(\text{米/秒}) \log_{\left[(1-b)^{\frac{1}{(\text{秒})}} \right]} \left(\frac{1}{1+Z} \right) \\ &= c(\text{米/秒}) \frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln\left[(1-b)^{\frac{1}{(\text{秒})}} \right]} = c(\text{米/秒}) \frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\frac{1}{(\text{秒})} \ln(1-b)} \\ &= c \frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln(1-b)} \frac{(\text{米/秒})}{\frac{1}{(\text{秒})}} = c \frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln(1-b)} (\text{米}). \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

3.6. 微对数的量纲分析

微对数定义式的量纲分析也应类同, 只要定义微对数

$$\begin{aligned} y^\vee = f^\vee(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_{\left(\frac{1+\Delta x}{1} \right)} \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

量纲问题就可解决了, 把上式中底数中的 1 称为基数, 它与 Δx 同量纲。

4. 继续深入的问题

微积开有很多值得继续深入的问题：

1) 因作者接触的实际问题的面有限，微积开的应用面很需要广大读者联系自己接触的实际问题，发现其新应用场合。

2) n 阶的微对数方程是否存在求解方法？

4) 多重积开、曲线积开、曲面积开的应用面在哪？

5) 对应于微积分中的傅里叶变换的微积开“傅里叶变换”是否有特殊的应用意义？对应于微积分中的拉普拉斯变换的微积开“拉普拉斯变换”是否也有特殊的应用意义？以及其它的对应变换问题。

6) 如果把微积开看成是（应变变量）对数空间中的一种“微积分”，那么任一单调函数构成的（应变变量）变换空间都可有该空间中的“微积分”，把它称为**微积函**，那么微积函的应用面又在哪呢？

7) 以及更一般的形式：任一单调函数构成的（自变量）变换空间都可有该空间中的“斯底尔吉斯微积分”^[10]，将该概念扩张到微积函，任一单调函数构成的（自变量）变换空间都可有该空间中的“**斯底尔吉斯微积函**”，那么斯底尔吉斯微积函的应用面又在哪呢？

5. 结束语：

微积开概念作为一种新的数学概念，其生命力在于：对适用问题的联系实际问题的效率高。

作者因研究类星体问题而产生微积开概念，并得出了类星体在赫罗图上的分族特性的规律。这个研究过程中具体只牵涉到微对数（常数型）与定积开，建立类星体方程组是初等数学方程组，且求得的全解为解释解，因此计算量相对就减小了，附录 1 的计算当时就是在没有微机的情况下，仅用查 10 位对数表结合加法笔算完成前期计算，后来用计算器完成后期计算，在格子纸上点出散点图。可见联系实际问题的效率高了。

因此，呼于科学界应重视微积开在其它学科的应用，以发挥提高科研效率。

正如用 ab 与 $\exp(\ln a + \ln b)$ 都可用于求解边长为 a 与 b 的矩形面积。但 ab 具有联系实际问题的“边长为 a 与 b 的矩形面积”的高效率，笔算 ab 的积却效率差；而 $\exp(\ln a + \ln b)$ 联系实际问题的效率差，查对数表加笔算加法求 $\exp(\ln a + \ln b)$ 相对于笔算 ab 的积的效率要高得多。因此在笔算时代，解决该实际问题总是先用 ab 联系实际问题的“边长为 a 与 b 的矩形面积”，再用公式 $ab = \exp(\ln a + \ln b)$ 将计算转化为查对数表与加法笔算。若停留在加法空间去解决该问题，是用定积分去求矩形的面积，进入乘法空间就是简单的乘法问题，提高了效率。

本文中的微积开概念就如同上述的 ab 那样有联系实际问题的效率高，本文中的 7 个定理就如同上述的“公式 $ab = \exp(\ln a + \ln b)$ ”那样来解决计算的高效率：把微积开变换为微积分计算。

关于微积开肯定还有很多争议或值得讨论的问题，欢迎大家与本文作者交流讨论，作者的 Email：bsese@qq.com；或 bao@wz.zj.cn。

参考文献: (返回首个引用处, 可点参考文献前的序号)

- [1] E.H.阿弗雷特主编, 李致森等译, 天体物理学前沿, 科学出版社, 1982年7月版, 第518页。
- [2] 复旦大学数学系编, 数学分析(下册), 上海科学技术出版社, 1960年5月版, 第656页。
- [3] 周又元等, 有射电子源结构类星体的统计分析, 天文学报, 1976年第17卷第2期第134页。
- [4] 向义和编, 大学物理导论(上册), 清华大学出版社, 1999年2月版, 第320页。
- [5] 复旦大学数学系编, 数学分析(下册), 上海科学技术出版社, 1960年5月版, 第659页。
- [6] 中国医学科学院卫生研究所编, 卫生统计学, 人民卫生出版社, 1987年版, 第387页。
- [7] 向义和编, 大学物理导论(上册), 清华大学出版社, 1999年2月版, 第304页。
- [8] 复旦大学数学系编, 数学分析(上册), 上海科学技术出版社, 1960年5月版, 第178页。
- [9] 复旦大学数学系编, 数学分析(上册), 上海科学技术出版社, 1960年5月版, 第126页。
- [10] 沈永欢等编, 实用数学手册, 科学出版社, 1992年8月版, 第211页。

目 录

内容摘要	
Abstract	
0. 引言	
1. 微积开概念的产生	
1.1 微对数概念的萌芽	
1.2 定积开概念的产生	
1.3 微开方程概念的产生	
2. 微积开的基本概念	
2.1 增长率	
2.1.a 增长率的定义	
2.2 微对数	
2.2.a 微对数的定义 定理 1	
2.2.b 微对数在人口统计学中的意义	
2.2.c 微对数在原子物理中的意义	
2.2.d 微对数在动态几何中的意义	
2.2.e 微对数在其它学科中的意义简述	
2.3 微根	
2.3.a 微根的定义 定理 2	
2.3.b 高价微根的定义 定理 3	
2.3.c 微根在人口统计学中的意义	
2.4. 微开	
2.4.a 微开的定义	
微开的 exp 式	
微开的和底式	
微开的指式	
微开的底式	
2.5. 定积开	
2.5.a 和底定积开的定义	
2.5.b 和底定积开的计算	
定理 4 定理 5	
2.5.c 和底定积开的应用	
动态增利率存款本息的计算	
动态利率储蓄与其它储蓄本息对照表	
人口预测计算	
2.5.d 底-指定积开与底定积开的定义	
2.5.e 底-指定积开的计算 定理 6	
2.5.f 底定积开的应用	
波动利率的大额存款的本息计算	
2.5.g 底-指定积开的应用	
底-指定积开与几何平均值关系	
2.6 微开方程	
2.6.a 微对数方程的定义	
2.6.b 可分离变量的微对数方程	
2.6.c 一阶非齐次微对数方程	
2.6.d 微根方程的定义	
2.6.e n 阶 log 线性微根方程的求解	定理 7
2.6.f 微根方程的应用	
人口统计中概念与物理概念的对应	
生态平衡“力”	
人口演化微根方程	
1) 环境指数	
2) 社会作用指数	
3) 保守指数	
4) 育龄指数与自然增长“力”	
3. 量纲问题及其解决	
3.1. 微对数的底数是否带量纲	
3.2. 微对数概念萌芽问题中的量纲	
3.3. 银行存款问题	
3.4. 量纲问题的解决	
3.5. 微对数概念萌芽问题中的量纲分析	
3.6. 微对数的量纲分析	
4. 续深入的问题	
5. 结束语	
附录 1 用微分方程解距离红移问题	
附录 2 类星体的本质 (验证 1)	
附录 3 类星体在赫罗图上的分族特性	
——类星体的本质 (验证 2) 简介	
附录 4 主要变量符号表	

附录 1 用微分方程解距离红移问题

如果星光传播中光子的能量有一非常小的损耗率, 设光子瞬时损耗率为 H , 在任一时刻 t , 光子的能量为 E , 设光速为 c , E_0 为光子从光源发出 ($t = 0$) 时具有的能量, E_1 为被观测 ($t = t_1$) 时光子的能量值。那么有

$$\frac{dE}{dt} = -HE, \quad (\text{F1.1})$$

上式中的负号因定义 H 为损耗率而加, 对上式 (F.1.1) 分离变量, 得

$$\frac{dE}{E} = -Hdt, \quad (\text{F1.2})$$

两边积分, 得

$$\ln E = -Ht + C, \quad (\text{F1.3})$$

上式中 C 为任意常数, 将初始条件代入上式, 得

$$C = \ln E_0, \quad (\text{F1.4})$$

上式 (F.1.4) 代入式 (1.3), 得

$$\ln E = -Ht + \ln E_0, \quad (\text{F1.5})$$

移项, 得

$$Ht = \ln E_0 - \ln E, \quad (\text{F1.6})$$

将边界条件代入, 得

$$Ht_1 = \ln E_0 - \ln E_1, \quad (\text{F1.7})$$

而距离与传播时间的关系为

$$\frac{r}{c} = t_1 - t_0 = t_1 - 0 = t_1, \quad (\text{F1.8})$$

将距离与时间的关系 (F1.8) 代入式 (F1.7), 得

$$\frac{Hr}{c} = \ln E_0 - \ln E_1, \quad (\text{F1.9})$$

由上式解得

$$r = \frac{c}{H} \ln \frac{E_0}{E_1}, \quad (\text{F1.10})$$

因为

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{hv_0}{hv_1} = \frac{v_0}{v_1} = \frac{c/\lambda_0}{c/\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 + Z, \quad (\text{F1.11})$$

将上式 (F.1.11) 代入 (F.1.10) 式, 得

$$r = \frac{c}{H} \ln(1 + Z), \quad (\text{F1.12})$$

由式 (F.1.5) 解得

$$E = E_0 \exp(-Ht), \quad (\text{F1.13})$$

式 (F.1.12) 中的 H 为光子的瞬时损耗率, 单位时间损耗率应计算 $\Delta t=1$ 时的 $\Delta E/E$, 由此可推得它与单位时间损耗率的关系为

$$\begin{aligned} b &= \frac{E_0 \exp(-Ht) - E_0 \exp[-H(t+1)]}{E_0 \exp(-Ht)} = 1 - \frac{\exp[-H(t+1)]}{\exp(-Ht)} \\ &= 1 - \exp[-H(t+1) - (-Ht)] = 1 - \exp[-H], \end{aligned} \quad (\text{F1.14})$$

由上式解得

$$H = -\ln(1-b), \quad (\text{F1.15})$$

将上式代入 (F.1.12) 式, 得

$$r = -\frac{c}{\ln(1-b)} \ln(1+Z), \quad (\text{F1.16})$$

上式 (F1.16) 这个结果与主文中式 (1.1.7) 一致。

因为光子能量的单位时间损耗率很小, 即 $b \ll 1$, 因此有

$$\begin{aligned} H &= -\ln(1-b) \\ &= b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \dots \\ &\approx b, \end{aligned} \quad (\text{F1.17})$$

这里可能有读者会认为: H 为哈勃常数量纲为 (公里/秒/百万秒差距) 与 b 的量纲为 (1/秒) 二者量纲都不一样, 且 H 的数值也不小约为 (75 公里/秒/百万秒差距), 怎么会有 $H \approx b$ 呢? 让我们仔细地分析一下:

$$1 \text{ 公里} = 10^3 \text{ 米},$$

$$1 \text{ 百万秒差距} = 3.08568 \times 10^{16} \text{ 米},$$

$$H = 75 \text{ 公里/秒/百万秒差距}$$

$$= 75 \times 10^3 \text{ 米/秒} / (3.08568 \times 10^{16} \text{ 米})$$

$$= 2.43058 \times 10^{-18} / \text{秒}.$$

H 的确是很小的数, 是一个量纲也为 (1/秒) 的量。 H 与 b 的偏差在 10^{-36} /秒的量级。

因此, 将上式 (F.1.17) 代入 (F.1.12) 式, 得

$$r = \frac{c}{H} \ln(1+Z) \approx \frac{c}{b} \ln(1+Z). \quad (\text{F1.18})$$

附录 2 类星体的本质 (验证 1)

包学行

目 录

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. 类星体的特殊量 2. 类星体方程组 3. 类星体方程组的求解 4. 类星体方程组中常数的确定 <p>表 1 用 (哈勃最早定哈勃常数的) 24 个星系数据确定常数 b_1 的计算过程表</p> <ol style="list-style-type: none"> 5. 用类星体方程组求解一批类星体 <p>表 2 用类星体方程组求解 38 个类星体样品数据表</p> | <ol style="list-style-type: none"> 6. 类星体方程组求解数据的图解分析 6.1 类星体在赫罗图上的位置 6.2 类星体的红移分布图 6.3 类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图 <ol style="list-style-type: none"> 6.3.1 非光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图 6.3.2 光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图 6.4 非光变类星体的距离 r 与子源投影线分离 r_θ 的关系图 |
|---|---|

类星体的本质 (验证 1)

1. 类星体的特殊量

由于类星体存在很大的红移, 其很多观测量都要作红移影响的修正, 说明如下:

1.1. 观测色温度

观测到的类星体光谱色指数 $B-V$ 是已受到红移影响的, 由 $B-V$ 得出的温度为观测色温度 T_z , 由下式计算^[1]

$$T_z = \frac{7300K}{B-V+0.60}, \quad (\text{F2.1.1})$$

上式中的 K 为绝对温度单位;

1.2. 表面温度

类星体的表面温度 T 考虑要作红移影响的修正, 由下式近似计算, 即

$$T = (1+Z)T_z = \frac{(1+Z)7300K}{B-V+0.60}, \quad (\text{F2.1.2})$$

因为设 T 对应峰值波长分别为 λ_0 , 红移后的 T_z 对应峰值波长分别为 λ , 而峰值波长与温度成反比关系, 有

$$Z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \quad (\text{F2.1.3})$$

$$\lambda_0 = \frac{k}{T}, \quad (\text{F2.1.4})$$

$$\lambda = \frac{k}{T_z}, \quad (\text{F2.1.5})$$

上三式中 k 为峰值波长与温度成反比的比例系数，从式 (F2.1.1) (F2.1.3) (F2.1.4) (F2.1.5) 可解得式 (F2.1.2) ；

1.3. 红移热星等改正

红移热星等改正（总是负值）为^[2]

$$BC_1 = 42.54 - 10 \lg T_z - \frac{29000K}{T_z}, \quad (\text{F2.1.6})$$

这是未作红移影响修正的；

1.4. 热星等改正

热星等改正（总是负值）为^[2]

$$BC_2 = 42.54 - 10 \lg T - \frac{29000K}{T}, \quad (\text{F2.1.7})$$

这是已作红移影响修正的；

1.5. 改正绝对热星等

类星体改正绝对热星等定义为不仅距离移到了 10 秒差距，并消除了引力红移影响后，整个热辐射所达到的星等，绝对热星等其值应为

$$M_{bolg} = m_{bolg} + 5 - 5 \lg r_0, \quad (\text{F2.1.8})$$

上式中 r_0 为类星体的以秒差距为单位的距离数，是一个无量纲的值。这是由于绝对星等定义中是以 10 秒差距为标准距离与实际距离 r 比得上计算式的，为了使用有量纲的距离 r ，引入一个常数

$$r_1 = 1 pc = 1 \text{秒差距}, \quad (\text{F2.1.9})$$

将式 (F2.1.8) 改写为

$$M_{bolg} = m_{bolg} + 5 - 5 \lg \frac{r}{r_1}, \quad (\text{F2.1.10})$$

1.6. 改正热视星等

上式中的 m_{bolg} 为改正热视星等，即

$$m_{bolg} = m_{bol} - 2.5 \lg(1 + Z), \quad (\text{F2.1.11})$$

1.7. 热视星等

上式中的 m_{bol} 为热视星等，即

$$m_{bol} = V + BC_1, \quad (\text{F2.1.12})$$

1.8. 其它量与 BC_2

类星体的其他一些量如绝对视星等、改正视星等的计算须用到 BC_2 ，这里就不详述了。

2. 类星体方程组

有许多人认为类星体的辐射为非热辐射频谱。作者认为虽然类星体辐射频谱形似为非热辐射频谱，但这种频谱是由低密度高厚度类星体光球层热辐射频谱，因光球层各深度层光的引力红移差异叠加形成的。

有许多人认为类星体的红移全是由距离效应产生的，类星体是遥远的天体。作者认为类星体的红移主要是由**距离效应与引力红移共同作用**产生的，分离开二种红移后，距离红移分量是很小的。因此类星体距离要比原先许多人认定的小，类星体就分布在星系、星系团的附近。通过求解类星体方程组，可得出最早发现的一些类星体就分布在本星系群中。

若我们已知一个类星体的红移量 Z 及 UBV 测光的视星等 V (可见光) 与蓝区视星等 B 。如果假设类星体的光辐射主要是热辐射，则

用式 (F2.1.2) 可求得类星体的表面温度 T ;

用式 (F2.1.11) 可求得类星体的改正热星等 m_{bolg} 。

设类星体的 6 个未知量:

距离为 r (单位: 秒差距, 用符号 pc 表示);

质量为 M (单位: 太阳质量, 用符号 M_{\odot} 表示);

半径为 R (单位: 太阳半径, 用符号 R_{\odot} 表示);

(请注意在“微积开概念”一文中的 M 与 R 不是以太阳质量 M_{\odot} 、太阳半径 R_{\odot} 为单位的, 距离 r 也不是以秒差距 pc 为单位的。)

改正绝对热星等为 M_{bolg} ;

距离红移量为 Z_r , 即红移量 Z 中所含距离红移分量;

引力红移量为 Z_y , 即红移量 Z 中所含引力红移分量。

再定义:**质光比**, 即类星体的质量 M 与光度 L 之比为

$$\mu = \frac{M}{L}, \quad (\text{F2.2.1})$$

类星体的**距离红移分量因子**为

$$\xi = \frac{\lg(1+Z_r)}{\lg(1+Z)}, \quad (\text{F2.2.2})$$

引入作者在“微积开概念”一文^[11]中推出的距离与距离红移关系公式及星体质量尺度与引力红移关系公式, 可得到类星体方程组的如下 6 条方程式:

距离与距离红移的关系为^[11]

$$r = \frac{c}{H} \ln(1+Z_r) = b_1 \lg(1+Z_r), \quad (\text{F2.2.3})$$

其中

$$b_1 = \frac{c}{H \lg e}, \quad (\text{F2.2.4})$$

从式 (1.2.18) 知, 引力红移与天体质量及尺度的关系为^[11]

$$\ln(1+Z_y) = \frac{GM_{\odot}M}{c^2 R_{\odot}R}, \quad (\text{F2.2.5})$$

上式 (F2.2.5) 中 c 为光速, G 为万有引力系数;

红移的总量为

$$1+Z = (1+Z_r)(1+Z_y), \quad (\text{F2.2.6})$$

改正绝对热星等为式 (F2.1.10)^[2], 再列于下面

$$M_{bolg} = m_{bolg} + 5 - 5 \lg \frac{r}{r_1}, \quad (\text{F2.2.7})$$

改正绝对热星等还可表为^[1]

$$M_{bolg} = 42.36 - 10\lg T - 5\lg R, \quad (\text{F2.2.8})$$

光度为^[2]

$$L = 10^{-0.4(M_{bolg} - M_{bol\odot})}, \quad (\text{F2.2.9})$$

上 (F2.2.9) 式中 $M_{bol\odot}$ 为太阳的绝对热星等。

3. 类星体方程组的求解

对 (F2.2.6) 式两边取对数并移项, 得

$$\lg(1 + Z_y) = \lg(1 + Z) - \lg(1 + Z_r), \quad (\text{F2.3.1})$$

由 (F2.2.1) 式与 (F2.2.9) 式解得

$$M = \mu 10^{0.4M_{bol\odot} - 0.4M_{bolg}}, \quad (\text{F2.3.2})$$

由 (F2.2.8) 式解得

$$R = 10^{8.472 - 2\lg T - 0.2M_{bolg}}, \quad (\text{F2.3.3})$$

将 (F2.2.5) 式对数换底, 得

$$\frac{\lg(1 + Z_y)}{\lg e} = \frac{GM_{\odot}M}{c^2 R_{\odot}R}, \quad (\text{F2.3.4})$$

将 (F2.3.1) 式、(F2.3.2) 式与 (F2.3.3) 式代入 (F2.3.4) 式, 得

$$\begin{aligned} & \lg(1 + Z) - \lg(1 + Z_r) \\ &= \frac{\mu \lg e \cdot GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} 10^{-8.472 + 0.4M_{bol\odot} + 2\lg T - 0.2M_{bolg}}, \end{aligned} \quad (\text{F2.3.5})$$

由 (F2.2.3) 式代入 (F2.2.7) 式, 得

$$M_{bolg} = m_{bolg} + 5 - 5\lg \left[\frac{b_1}{r_1} \lg(1 + Z_r) \right], \quad (\text{F2.3.6})$$

由 (F2.3.6) 式代入 (F2.3.5) 式, 得

$$\begin{aligned} & \lg(1 + Z) - \lg(1 + Z_r) \\ &= \frac{b_1 \mu \lg e \cdot GM_{\odot} 10^{0.4M_{bol\odot}}}{2.964831389 \times 10^9 r_1 c^2 R_{\odot}} \lg(1 + Z_r) 10^{2\lg T - 0.2m_{bolg}}, \end{aligned} \quad (\text{F2.3.7})$$

令

$$b_2 = \frac{b_1 \lg e \cdot GM_{\odot} 10^{0.4M_{bol\odot}}}{2.964831389 \times 10^9 r_1 c^2 R_{\odot}}, \tag{F2.3.8}$$

将 (F2.3.8) 式代入 (F2.3.7) 式并移项, 得

$$\left(1 + b_2 \mu 10^{2\lg T - 0.2m_{bolg}}\right) \lg(1 + Z_r) = \lg(1 + Z), \tag{F2.3.9}$$

两边除以相同的因式, 结合 (F2.2.2) 式, 得

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\lg(1+Z_r)}{\lg(1+Z)} \\ &= \frac{1}{1 + b_2 \mu 10^{2\lg T - 0.2m_{bolg}}}, \end{aligned} \tag{F2.3.10}$$

上式结合 (F2.2.3) 式, 得

$$r = b_1 \lg(1 + Z_r) = b_1 \xi \lg(1 + Z), \tag{F2.3.11}$$

还可从式 (F2.2.2) 或式 (F2.3.10) 中求出距离红移量为

$$Z_r = 10^{\xi \lg(1+Z)} - 1, \tag{F2.3.12}$$

再依次由 (F2.3.6) 式求出 M_{bolg} , 由 (F2.3.2) 式求出 M , 由 (F2.3.3) 式求出 R , 由 (F2.2.5) 式求出引力红移为

$$Z_y = \exp \frac{GM_{\odot} M}{c^2 R_{\odot} R} - 1, \tag{F2.3.13}$$

至此类星体的 6 个未知量的解析解表达式都已求出。

4. 类星体方程组中常数的确定

4.1. 距离红移公式中常数 b_1 的确定

取哈勃最早用于定哈勃常数的 24 个星系数据^[3], 设这 24 个星系的红移量 Z 中既包含有距离红移分量 Z_r , 也包随机的速度分量 Z_u , 则

$$1 + Z_u = \frac{1 + Z}{1 + Z_r}, \tag{F2.4.11}$$

由上式结合 (F2.2.3) 式可解得

$$Z_u = \frac{1 + Z}{1 + Z_r} - 1 = \frac{1 + Z}{10^{(r/b_1)}} - 1, \tag{F2.4.12}$$

24 个星系的距离是已知的, 只要将 b_1 值定正确了, 那随机的速度分量将会相互抵消, 即有

$$\sum_{i=1}^{24} Z_{ui} = \sum_{i=1}^{24} \left(\frac{1 + Z}{1 + Z_{ri}} - 1 \right) = \sum_{i=1}^{24} \left(\frac{1 + Z}{10^{(r_i/b_1)}} - 1 \right) \approx 0, \tag{F2.4.13}$$

24 个星系的数据代入方程 (F2.4.13) 以

$$\sum_{i=1}^{24} Z_{ui} = 1.221399357 \times 10^{-07} \approx 0, \tag{F2.4.14}$$

解得

$$b_1 = 1.687753770 \times 10^9 pc = 1.687753770 \times 10^9 \text{ 秒差距}, \tag{F2.4.15}$$

由于 24 个星系的原始数据的精度所限, b_1 的有效精度值取为

$$b_1 = 1.69 \times 10^9 pc = 1.69 \times 10^9 \text{ 秒差距}. \tag{F2.4.16}$$

求解过程的中间数据见 (表 1)。

表1 用 (哈勃最早定哈勃常数的) 24个星系数据确定常数 b_1 的计算中间数据表

参数名 名称	单位	r	$u = Zc$	Z	$\lg(1+Z)$	$r/b = \lg(1+Zr)$	$\lg(1+Zu)$	u
		$10^6 pc$	km/s	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}
S.Mag		0.032	170	5.6706	2.4620	1.896011170	2272.407	52.33779
L.Mag		0.034	290	9.6734	4.1991	2.014511868	3997.605	92.09062
NGC 6822		0.214	-130	-4.336	-1.8837	12.67957470	-3151.612	-72.54221
NGC 598		0.263	-70	-2.335	-1.0142	15.58284180	-2572.458	-59.21549
NGC 221		0.275	-185	-6.171	-2.6808	16.29384599	-4310.215	-99.19714
NGC 224		0.275	-220	-7.338	-3.1882	16.29384599	-4817.586	-110.8675
NGC 5457		0.45	200	6.6713	2.8963	26.66265708	230.06920	5.2976795
NGC 4736		0.5	290	9.6734	4.1991	29.62517453	1236.5383	28.476399
NGC 5194		0.5	270	9.0062	3.9096	29.62517453	947.07851	21.809667
NGC 4449		0.63	200	6.6713	2.8963	37.32771991	-836.4371	-19.25782
NGC 4214		0.8	300	10.007	4.3438	47.40027925	-396.2496	-9.123567
NGC 3031		0.9	-30	-1.001	-0.4346	53.32531415	-5767.148	-132.7054
NGC 3627		0.9	650	21.682	9.4060	53.32531415	4073.503	93.839882
NGC 4826		0.9	150	5.0035	2.1724	53.32531415	-3160.099	-72.73751
NGC 5236		0.9	500	16.678	7.2372	53.32531415	1904.687	43.866666
NGC 1068		1	920	30.688	13.307	59.25034906	7382.141	170.12463
NGC 5055		1.1	450	15.010	6.5140	65.17538397	-3.499020	-0.080568
NGC 7331		1.1	500	16.678	7.2372	65.17538397	719.6804	16.572626
NGC 4258		1.4	500	16.678	7.2372	82.95048868	-1057.830	-24.35447
NGC 4151		1.7	960	32.022	13.885	100.7255934	3812.266	87.819203
NGC 4382		2	500	16.678	7.2372	118.5006981	-4612.851	-106.1584
NGC 4472		2	850	28.353	12.296	118.5006981	446.0358	10.270881
NGC 4486		2	800	26.685	11.574	118.5006981	-276.3017	-6.361878
NGC 4649		2	1090	36.359	15.762	118.5006981	3911.584	90.108124
					$b_1 = 1.687753770 \times 10^9$	$\sum u = 1.221399357 \times 10^{-7}$		

注：因表格宽度所限, 所列的中间数据的保留位数已被截短。

4.2. 常数 b_2 的确定

将太阳质量^[2]

$$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} kg = 1.989 \times 10^{30} \text{ 公斤},$$

太阳半径^[2]

$$R_{\odot} = 6.9599 \times 10^8 m = 6.9599 \times 10^8 \text{ 米},$$

太阳的绝对热星等^[2]

$$M_{bol\odot} = 4.75$$

万有引力常数^[1]

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} = 6.672 \times 10^{-11} \text{ 牛顿} \cdot \text{米}^2 \cdot \text{千克}^{-2},$$

光速^[1]

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1},$$

及

$$b_1 = 1.687753770 \times 10^9 \text{ pc} = 1.687753770 \times 10^9 \text{ 秒差距},$$

代入 (F2.3.8) 式, 得

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{b_1 \lg e \cdot GM_{\odot} 10^{0.4M_{bol\odot}}}{2.964831389 \times 10^9 r_1 c^2 R_{\odot}} \\ &= \frac{1.68775377 \times 10^9 \lg e \cdot 6.672 \times 10^{-11} \times 1.989 \times 10^{30} \times 10^{0.4 \times 4.75}}{2.964831389 \times 10^9 \times 1 \times (2.99792458 \times 10^8)^2 \times 6.9599 \times 10^8} \\ &= 4.166197109 \times 10^{-5}, \end{aligned} \quad (\text{F2.4.21})$$

b_2 为一个无量纲常数。由于原始数据的精度所限, b_2 的有效精度值取为

$$b_2 = 4.17 \times 10^{-5}. \quad (\text{F2.4.22})$$

4.3. 类星体质光比 μ 的确定

如果一个类星体与星系成协, 设它所处的距离与成协星系同距离都为 r , 它们的距离红移都为 Z_r , 则可由 (F2.3.10) 式与 (F2.3.11) 式解得

$$\mu = \frac{\lg(1+Z) - \lg(1+Z_r)}{b_2 \lg(1+Z_r) \cdot 10^{2\lg T - 0.2m_{bolg}}}, \quad (\text{F2.4.31})$$

我们可用 n 个与星系成协的类星体数据, 用 (F2.4.31) 式求出 n 个 μ_i 值, 再用统计方法求出 1 个 μ 的中间值。

但作者目前只具有 1 个与星系成协的类星体的齐全数据, 即

类星体 3C275.1 ($Z=0.557$, $B=19.00$, $B-V=0.23$, $A_V=0$) 与星系 NGC4651 ($Z=0.0025$) 成协, 将这些数据代入各相关式, 得 3C275.1 的

$$T_z = \frac{(1+Z)7300K}{B-V+0.60} = \frac{7300K}{0.23+0.60} = 8795.180723K, \quad (\text{F2.4.32})$$

$$T = (1+Z)T_z = (1+0.557)8795.180723 = 13694.09639K, \quad (\text{F2.4.33})$$

$$\begin{aligned} BC_1 &= 42.54 - 10 \lg T_z - \frac{29000}{T_z} \\ &= 42.54 - 10 \lg 8795.180723 - \frac{29000}{8795.180723} = -0.199707951 \approx -0.20, \end{aligned} \quad (\text{F2.4.34})$$

$$m_{bol} = V + BC_1 = 19.00 - 0.199707951 = 18.80029205 \approx 18.80, \tag{F2.4.35}$$

$$\begin{aligned} m_{bol_g} &= m_{bol} - 2.5 \lg(1 + Z) \\ &= 18.80029205 - 2.5 \lg(1 + 0.557) = 18.31957052 \approx 18.32, \end{aligned} \tag{F2.4.36}$$

将 (F2.4.32) 式至 (F2.4.36) 式的数据代入 (F2.4.31) 式, 得

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(4.166197109 \times 10^{-5})^{-1} [\lg(1 + 0.557) - \lg(1 + 0.0025)]}{\lg(1 + 0.0025) \cdot 10^{2 \lg 13694.09639 - 0.2 \times 18.31957052}} \\ &= 104.0933565 \approx 104. \end{aligned} \tag{F2.4.37}$$

只用一个类星体数据求出的 μ 值, 总还不大放心使用, 因此先选 2 个角距较近有可能成协的类星体, 使用 $\mu = 104$ 求解类星体的距离, 如果求出的距离确实非常接近, 那么这个 $\mu = 104$ 就可放心使用于初算, 先验证一批数据。

作者选用了类星体

3C323.1 ($Z = 0.264, V = 16.69, B - V = 0.11, A_V = 0.31$)

与 3C334 ($Z = 0.555, V = 16.41, B - V = 0.12, A_V = 0.51$)

的数据, 它们角距约 8.5 度, 求得它们的距离分别约为 327000 秒差距与 306000 秒差距 (见表 2), 距离差约为 21000 秒差距 (这个距离差跟银河系至大麦哲伦云的距离 52000 秒差距同量级), 显然 3C323.1 与 3C334 它们是成协的 (图 4.1)。因为若再将它们的角距约 8.5 度转作线距约为 47000 秒差距, 它们间的实距约为 52000 秒差距, 跟银河系至大麦哲伦云的距离几乎相等。它们间的连线与我们视线的夹角约为 66 度。

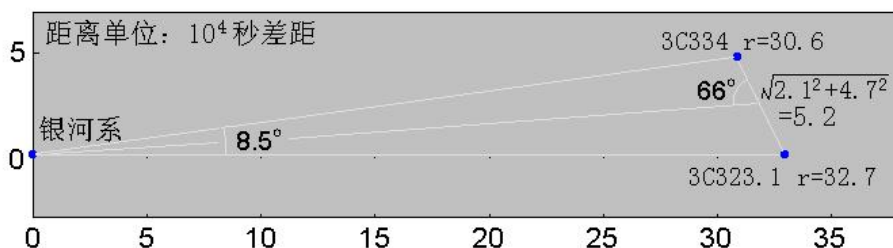


图 4.1 类星体 3C323.1 与 3C334 成协示意图

此外还可用两成协类星体的数据来定质光比。设两类星体成协 (它们的各参数分别加足标 a, b) 因距离相等, 由式 (F2.3.11) 得

$$\xi_a \lg(1 + Z_a) = \xi_b \lg(1 + Z_b), \tag{F2.4.38}$$

将式 (F2.3.10) 代入 (F2.4.38), 得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 + b_2 \mu 10^{2 \lg T_a - 0.2 m_{bol_g a}}} \lg(1 + Z_a) \\ &= \frac{1}{1 + b_2 \mu 10^{2 \lg T_b - 0.2 m_{bol_g b}}} \lg(1 + Z_b), \end{aligned} \tag{F2.4.39}$$

交叉相乘，得

$$\begin{aligned} & \left(1 + b_2 \mu 10^{2\lg T_b - 0.2m_{bol} \lg b}\right) \lg(1 + Z_a) \\ &= \left(1 + b_2 \mu 10^{2\lg T_a - 0.2m_{bol} \lg a}\right) \lg(1 + Z_b), \end{aligned} \quad (\text{F2.4.310})$$

展开各项，得

$$\begin{aligned} & \lg(1 + Z_a) + b_2 \mu 10^{2\lg T_b - 0.2m_{bol} \lg b} \lg(1 + Z_a) \\ &= \lg(1 + Z_b) + b_2 \mu 10^{2\lg T_a - 0.2m_{bol} \lg a} \lg(1 + Z_b), \end{aligned} \quad (\text{F2.4.311})$$

移项，提取公因式，得

$$\begin{aligned} & b_2 \mu \left[10^{2\lg T_b - 0.2m_{bol} \lg b} \lg(1 + Z_a) - 10^{2\lg T_a - 0.2m_{bol} \lg a} \lg(1 + Z_b) \right] \\ &= \lg(1 + Z_b) - \lg(1 + Z_a), \end{aligned} \quad (\text{F2.4.312})$$

解得

$$\mu = \frac{\lg(1 + Z_b) - \lg(1 + Z_a)}{b_2 \left[10^{2\lg T_b - 0.2m_{bol} \lg b} \lg(1 + Z_a) - 10^{2\lg T_a - 0.2m_{bol} \lg a} \lg(1 + Z_b) \right]}. \quad (\text{F2.4.312})$$

因作者手头比较公认的二成协类星体（数据齐全的）都未找到，所以未用式 (F2.4.43) 求质光比。

5. 用类星体方程组求解一批类星体

确定了 b_1 、 b_2 、 μ 这些常数后，现将一批共 38 个类星体数据^{[1][9]}用类星体方程组求解，其中 10 个为光变类星体，28 个为非光变类星体，求得的数据如表 2。这些类星体方程组求解的数据与所有指出类星体是局域的观测证据^{[4][5][6][7][8][10]}都能吻合。

6. 类星体方程组求解数据的图解分析

将表 2 中 38 个类星体的求解数据用 Excel 生成类星体的各种关系图，通过这些图就更能直观地显露类星体方程组揭示的类星体的一些规律与特性了。

6.1. 类星体在赫罗图上的位置

类星体在赫罗图 (图 6.1) 上的斜率，跟超巨星、巨星的斜率非常接近。类星体所处的位置好像是比超巨星的还要超巨的位置，在光变类星体与超巨星之间是造父变星的位置，图上未标出。

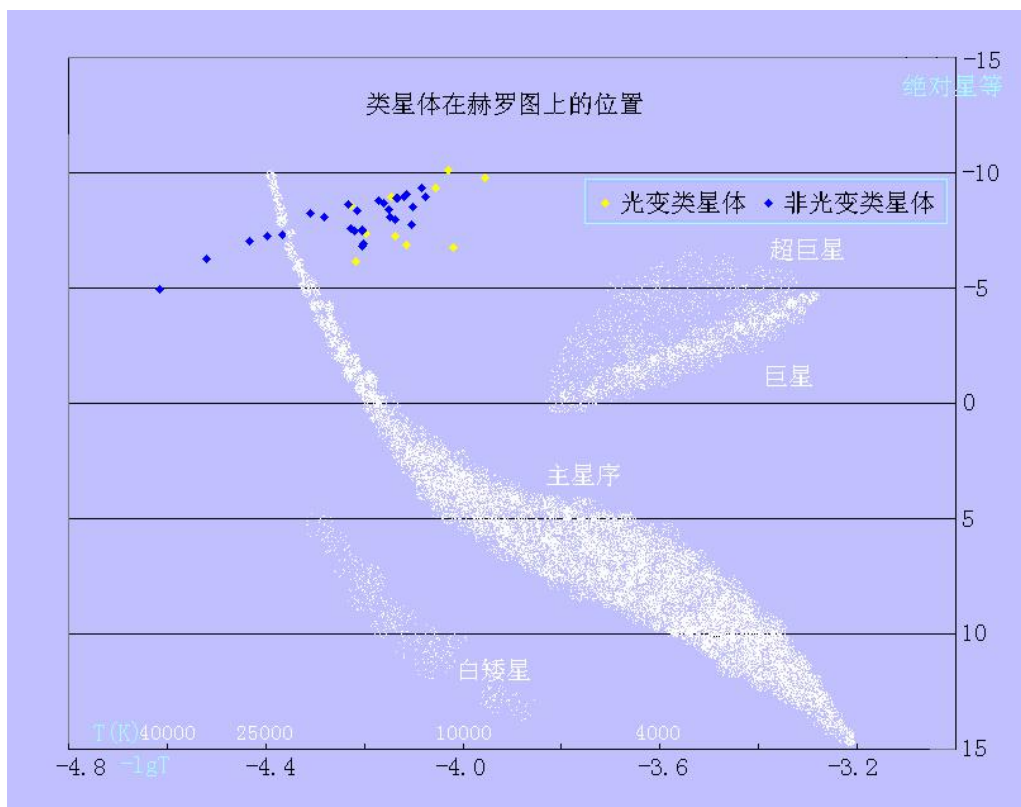


图 6.1 类星体在赫罗图上的位置

6.2. 类星体的红移分布图

[美]G.R.伯比奇曾指出类星体的红移分布存在一些密集处与稀少处^{[4][5]}。

根据类星体方程组的计算数据，类星体的红移中引力红移占主要分量，可见 (表 2)，将这些数据绘出类星体的引力红移分布图 (图 6.2)，从该图中可看出这种引力红移的分布主要是非光变类星体引起，说明非光变类星的某些稳定的星体壳层结构，可产生某些密集的引力红移值，见 (图 6.2) 上方蓝色点。但光变类星体的体壳层结较快的变化之中，所以光变类星体的引力红移分布较散，见 (图 6.2) 下方黄色点。

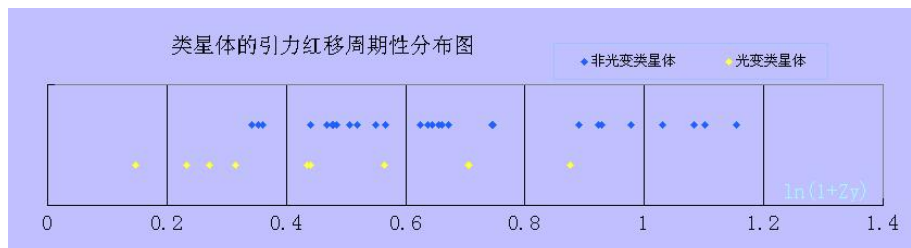


图 6.2 类星体的引力红移分布图



图 6.3 类星体的距离红移分布图

类星体的距离红移分布如 (图 6.3), 非光变类星体距离红移较集中, 而光变类星体的距离红移较分散, 这是因为近处的光变至较弱光变类星体与远处的光变至较强的光变类星体亮度接近, 都被观测为一些相近的视星等 (最亮的一批类星体) 引起。(注意: 作者使用的是一批最早观测到的较亮的类星体。)

6.3. 类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

通常尺度半径大可增大亮度, 引力红移过大会降低亮度。

6.3.1 非光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

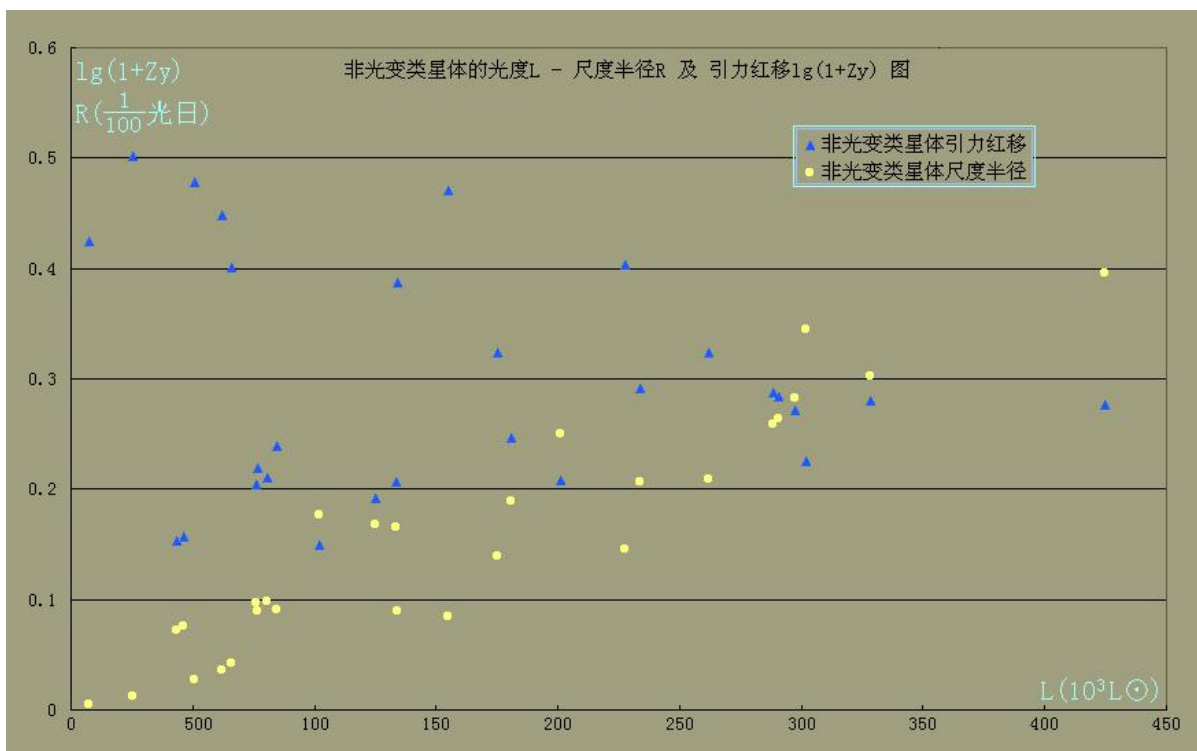


图 6.4 非光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

非光变类星体基本符合: 尺度半径大可增大亮度, 引力红移过大会降低亮度; 引力红移适当大时, 质量大对发光的贡献高于引力红移对发光的损耗时, 有一段引力红移增发光也增的阶段。

6.3.2 光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系较复杂, 看来光变类星体的质光比 μ 还不能作常数处理, 光变类星体的质光比 μ 还会与其它一些量有关, 这有待使用更多的光变类星体的观测数据来确定这种关系。

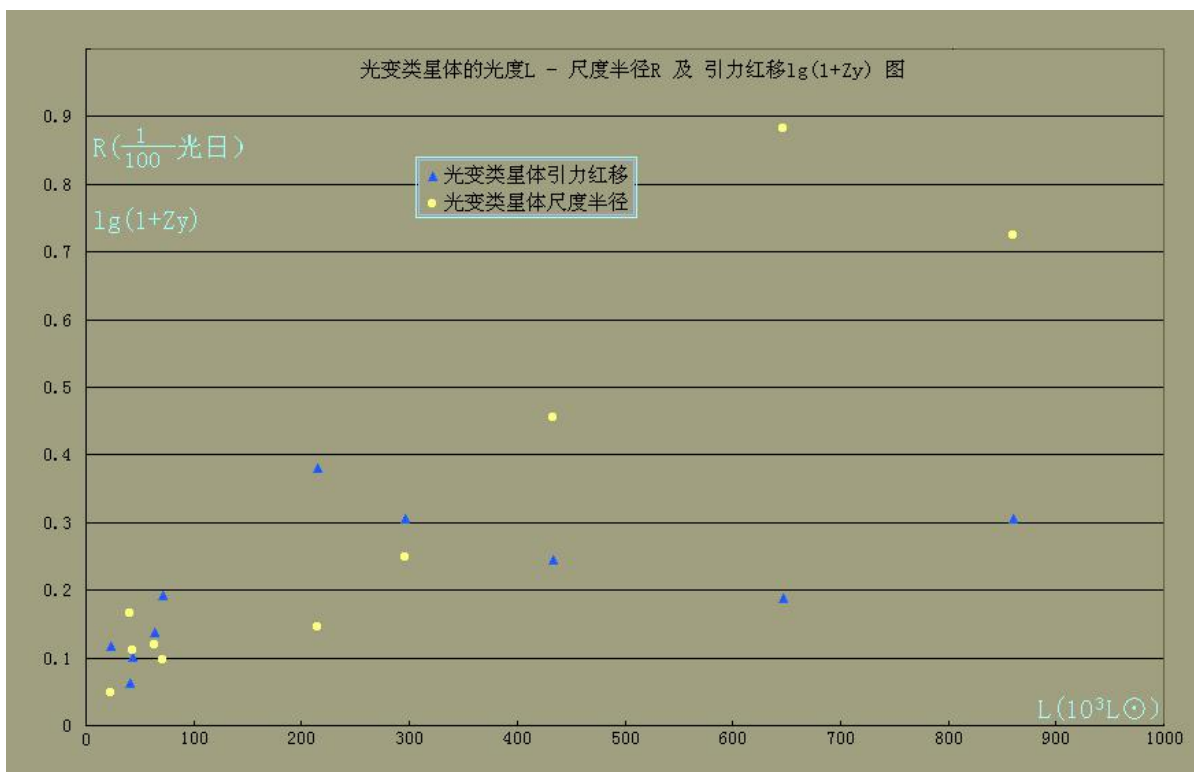


图 6.5 光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

6.4. 非光变类星体的距离 r 与子源投影线分离 θ 的关系图

因光传输的时延，距离 r 也具有时标性质；子源间最大投影线分离 θ 也是随时间增大的也具有时标性质（非最大值会受子源间连线与视向夹角大小影响）。因此类星体的距离 r 子源投影线分离 θ 的关系图上，同一的类星体质量组的最大子源投影线分离 θ 的临界线 $\text{Max. } \theta(r)$ 应具有负斜率，见（图 6.6）。

7. 小结

通过以上的图解分析，可见本文的类星体方程组求解的数据已显露了一些类星体的规律特性。因此呼于专业天体物理工作者对本文的类星体方程组作进一步的验证。

注：一些读者对本文中类星体方程组求解过程将解的解释式转换为以 10 为底的对数形式感到不理解，为什么要作这种形式的转换呢？这是因为本文的初稿形成于 70 年代，当时求解类星体方程组的计算是用查 10 位对数表^[12]结合加法笔算求得的，80 年代有了电子计算器后又用电子计算器作了验算，90 年代有了微机与 Excel 软件又再作了一次的验算。由于以后的验算都一采用早期已形成的计算式，因此有本文的以 10 为底的计算式。

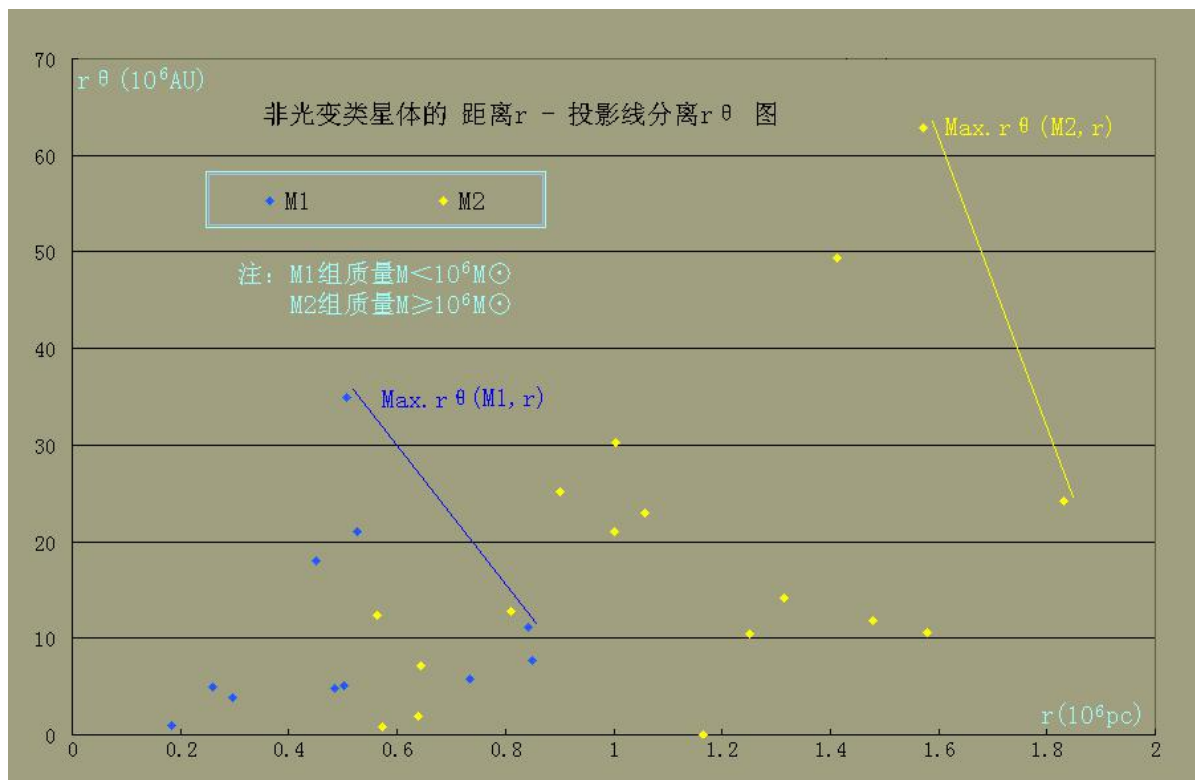


图 6.6 非光变类星体的距离 r 与子源投影线分离 θ 的关系图

参考文献: (点参考文献的序号可链接至附录 2 目录)

- [1] [英]C.W.艾伦编, 杨建译, 物理量与天体物理量, 上海人民出版社, 1976 年版, P14、P19、P243、P349 等。
- [2] 戴文赛主编, 天文学教程 (上册), 上海科学出版社, 1961 年 12 月版, 第 157、297、355、372、408、478-481 页。
- [3] [美]埃德温·哈勃著, 伍任译, 河外星云的 距离和视向速度之间的关系, 自然辩证法杂志, 1975 年第 4 期, 第 155 页。
- [4] [美]G.R.伯比奇著, 胡家聰、钱毓敏译, 红移问题, 摘译, 1975 年第 4 期, 第 9 页。
- [5] 曹盛林编, 宇宙天体交响曲, 中国华侨出版社, 1995 年 12 月第 1 版, 第 143 页。
- [6] [美]霍尔顿·阿尔普著, 伍任译, 星系天文学中的观测佯谬, 自然辩证法杂志, 1975 年第 4 期, 第 163 页。
- [7] [美]M.施米特、F.贝洛著, 殷鹏程译, 类星体的演化, 摘译, 1975 年第 4 期, 第 27 页。
- [8] 戴文赛, 星系的结构与演化, 科学通报, 1976 年第 6 期。
- [9] 周又元等, 有射电子源结构类星体的统计分析, 天文学报, 1976 年第 17 卷第 2 期第 134 页。
- [10] 赵仁扬, 宇宙射电, 科学出版社, 1978 年 9 月第 1 版, P135。
- [11] 包学行, 微积开概念, 见本文件组的正文。
- [12] 沈时悦编, 十位对数表, 科学出版社, 1974 年 4 月第 1 版。

附录 3 类星体在赫罗图上的分族特性

——类星体的本质 (验证 2) 简介

正确的距离才能得出正确的光度，正确的光度才能作出正确的赫罗图，从而在图上显出特性。

类星体的本质 (验证 1) 因是早期所作，数据量小 (24 个星系、38 个类星体)。近年来用星系 NED-D8.1.0 (1 万多星系)、类星体 SDSS DR7 (10 多万类星体) 等数据作了统计分析，计算式仍然是用类星体的本质 (验证 1) 的计算算式，仅类星体的表面温度计算^[1]作了改进，完善了高温端吻合，重新统计求出

$$b = 1.107 \times 10^{10} pc = 1.107 \times 10^{10} \text{ 秒差距}, \tag{F3.1}$$

$$\mu = 18.36, \tag{F3.2}$$

(因类星体在演化的各期质光比在变化，目前数据不足暂用这一 μ 值数据，以后有待进一步分类确定质光比。)

通过分析，作出了更有说服力结果，例如用作者的方法计算的类星体距离与子源角分离的关系图 (图 1) 跟 宇宙论计算的类星体距离与子源角分离的关系图 (图 2) 对照。

本文把作者方法得出的类星体距离称为微积开距离，以便与宇宙学距离好分别说明。

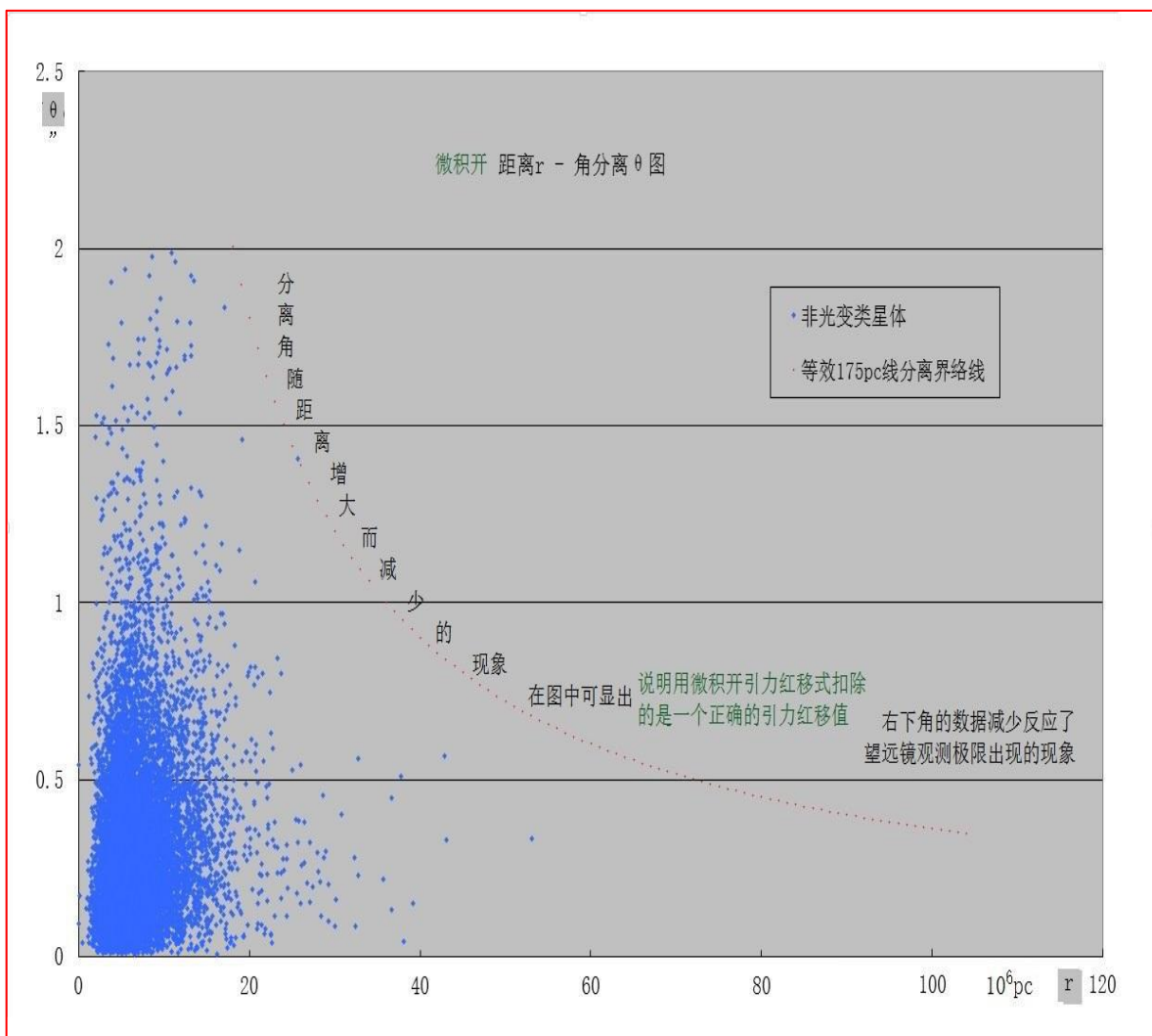


图 1 作者的方法计算的类星体距离与子源角分离的关系图

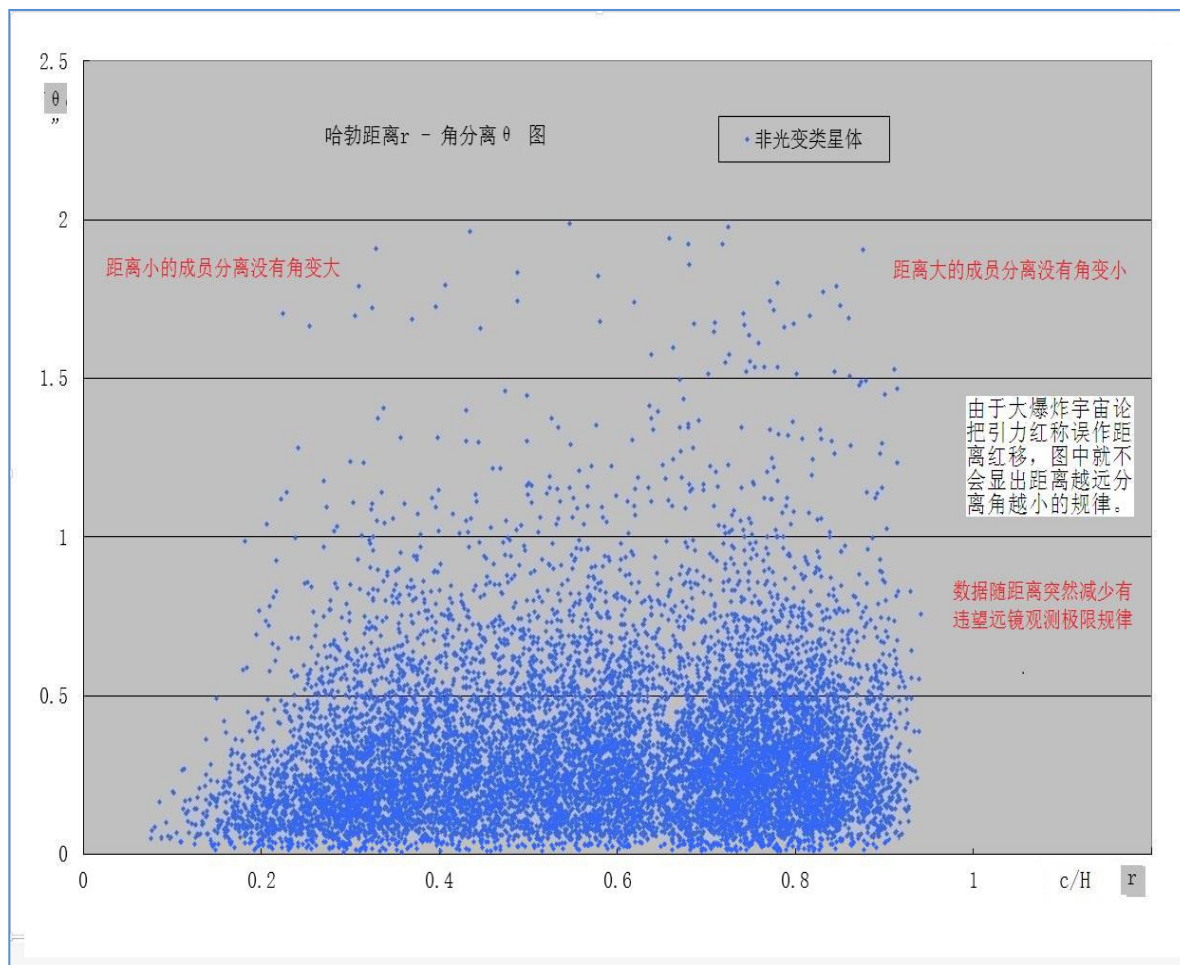


图 2 宇宙论计算的类星体距离与子源角分离的关系图

从上述 (图 1) 与 (图 2) 的对照可看出, (图 1) 符合距离越远子源角分离越小的规律, 说明微积开距离更符合规律, 宇宙学距离有悖于距离越远子源角分离越小的规律。

用作者的方法计算的类星体距离得出的光度跟 宇宙论计算的类星体距离得出的光度, 作出对照赫罗图见 (图 3), 从中可看出用宇宙学距离作的赫罗图就少有精细的轨迹结构, 由作者的理论求解的数据作出的类星体赫罗图就有精细的轨迹。

用宇宙学距离作的赫罗图就少有精细的轨迹结构的中心放大图见 (图 4)。

由作者的理论求解的数据作出的类星体赫罗图就有精细的轨迹的放大图见(图 5)与中心放大图见(图 6)。在该二图中在类星体的密集区存在一条鸿沟, 鸿沟二侧的类星体赫罗图参数相近, 为方便描述把图中鸿沟上边缘称为北岸、下边缘称为南岸。

这道鸿沟是数学游戏产生的, 还是类星体的真实特性的反应呢? 那么我们可把北岸的类星体的光谱与南岸的类星体的光谱^[2]找出来比较一下就能明白了。比较发现北岸的类星体的光谱 (图 8) 与南岸的类星体的光谱 (图 9) 有很大的差别。这说明这是真实的类星体特性, 用微积开引力红移式扣除了一个正确的引力红移值, 因此得出正确的类星体距离。

若把二岸的类星体数据作出二阶的拟合曲线, 并以二曲线的间距系数差作修正, 得出二岸内部的分族曲线族。北岸的分族曲线族 (简称北族线) 为:

$$\begin{aligned}
 -M_{bolg} = & (-11.871 + k \cdot 1.026)(\lg T)^2 \\
 & + (-27.0439 + k \cdot 2.9149)(\lg T) - 3.6542 + k \cdot 2.1698,
 \end{aligned}
 \tag{F3.3}$$

南岸的分族曲线族 (简称南族线) 为:

$$\begin{aligned} -M_{bolg} = & (-12.897 - k \cdot 1.026) (\lg T)^2 \\ & + (-29.9588 - k \cdot 2.9149) (\lg T) - 5.824 - k \cdot 2.1698, \end{aligned} \quad (F3.4)$$

族参数 k 为正的实系数, k 以 1 位小数的精度取值, 当 $k=0$ 时, 式(F3.3) 称为 B0 族线, 为北岸线的数值拟合线, 式 (F3.4) 称为 N0 族线, 为南岸线的数值拟合线。当 $k=1.2$ 时, 式 (F3.3) 称为 B1.2 族线, 为北族线, 式 (F3.4) 称为 N1.2 族线, 为南族线。余类推。

先试找出 B1 族线、B0 族线、N0 族线与 N1 族线共 4 条族线旁的类星体光谱, 作出合成光谱。其中 B1 族线旁为 156 个类星体合成光谱见 (图 7)、B0 族线旁为 59 个类星体合成光谱见 (图 8)、N0 族线旁为 26 个类星体合成光谱见 (图 9) 与 N1 族线旁为 52 个类星体合成光谱见 (图 10)。

北岸边缘 B0 族的 59 个类星体的合成光谱就显得活跃度差点。

南岸边缘 N0 族的 26 个类星体的合成光谱, 显得较活跃。

为什么会存在鸿沟? 鸿沟两岸的类星体物理上有什么区别? 有待天文学家进一步观测研究。关注鸿沟两岸的类星体具体成员的读者可 [Email 索取二岸数据图表](#)。

上述 (图 7)、(图 8)、(图 9)、(图 10) 4 个光谱合成图的红移高端合成谱线都下方, 红移低端合成谱线都上方, 因为引力红移占类星体红移的主要分量 (SDSS DR7 的取大 $\xi = 0.07906893$), 因此说明类星体在赫罗图上还存在与引力红移相关的分族特性, 类星体在赫罗图上与引力红移相关的分族特性见 (图 11)。每个类星体都可求出它所在的族线的截距 K , 该值与引力红移强相关 (图 12)。

对类星体 DR7 的统计分析更多的内容待 [微积分概念 V2.3](#) 的补增。

参考文献:

- [1] 胡宜宁 巩岩, 星模拟器星光颜色模拟的初步研究, 光电工程, 2010 年 2 月第 37 卷第 2 期, 第 65-73 页。
- [2] SDSS, SDSS DR7, <http://sdssorgdev.pha.jhu.edu/dev/zh/tools/search/>

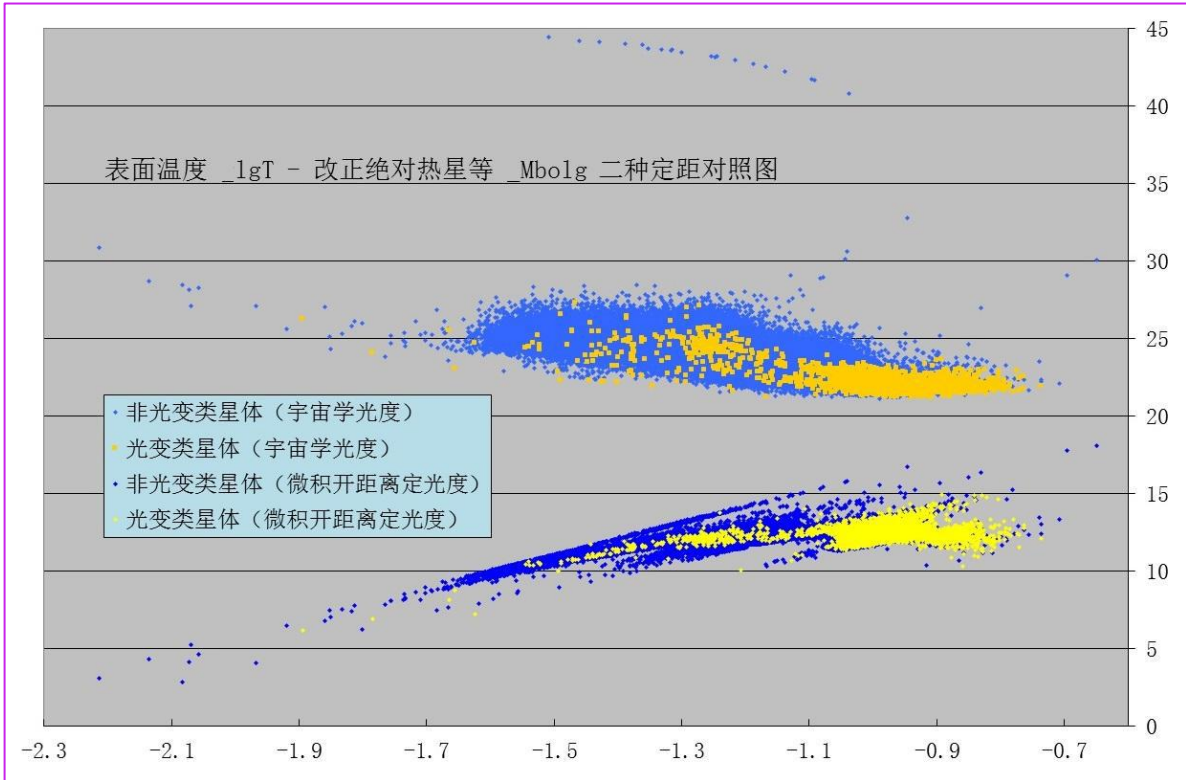


图3 二种距离定光度的对照赫罗图

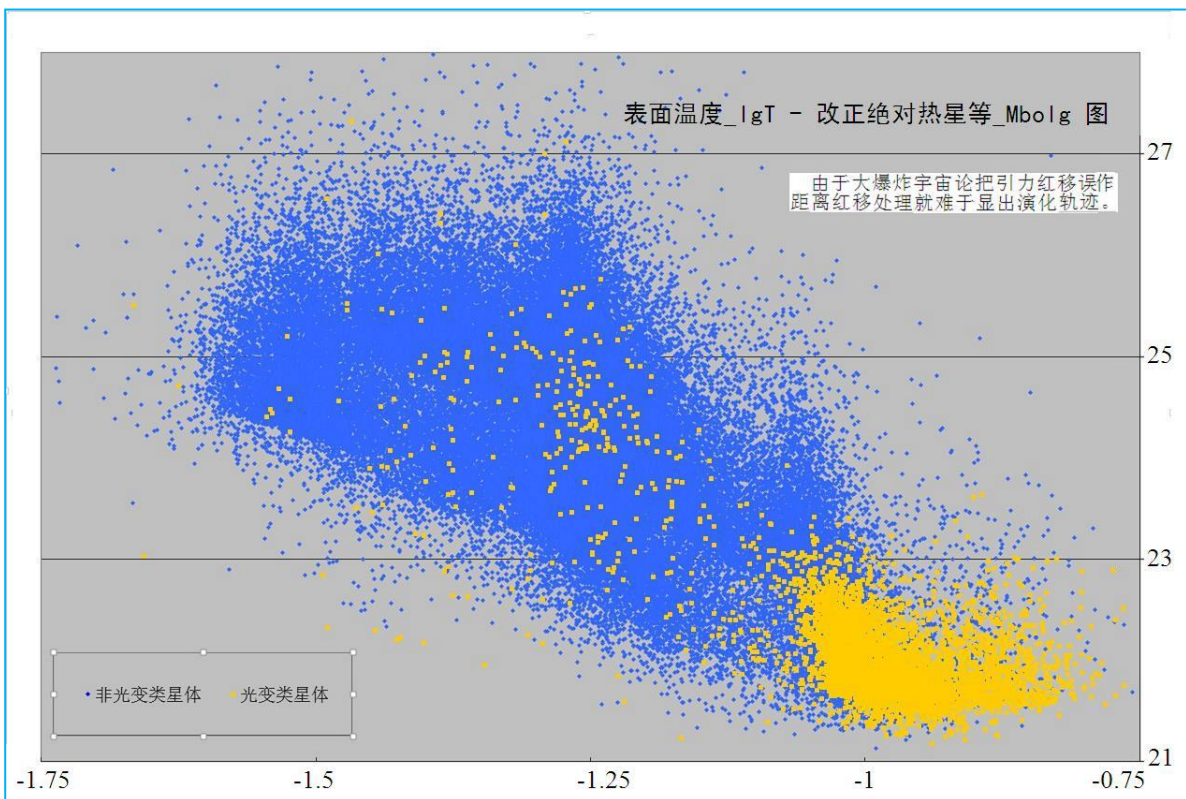


图4 宇宙论计算的类星体距离得出的赫罗图中心放大图

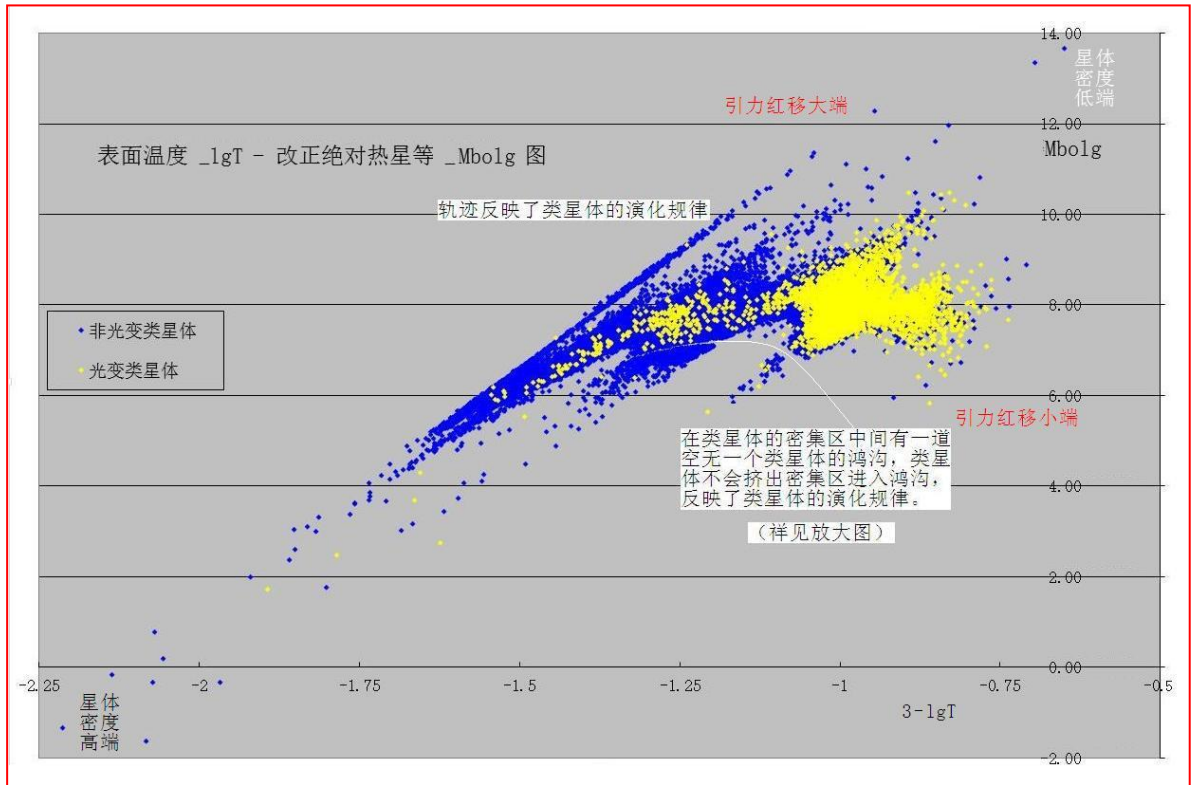


图 5 作者的方法计算的类星体距离得出的赫罗图

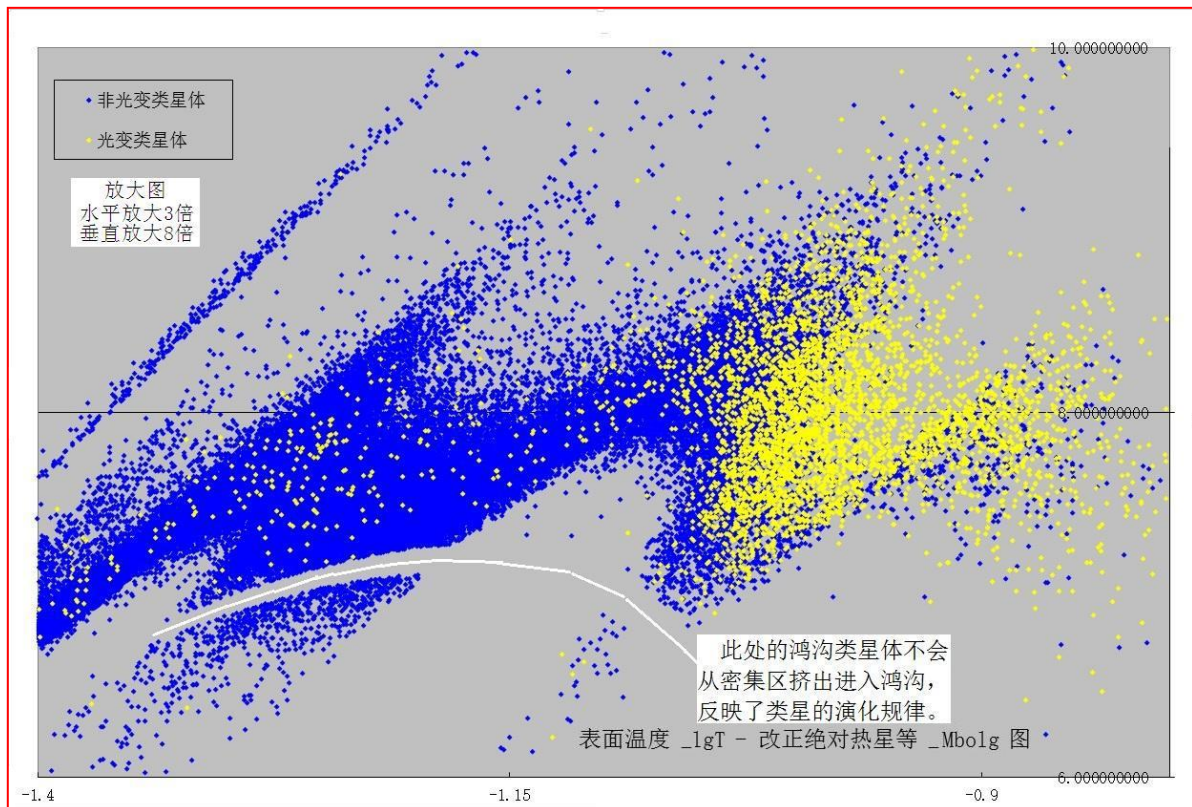


图 6 作者的方法计算的类星体距离得出的中心放大赫罗图

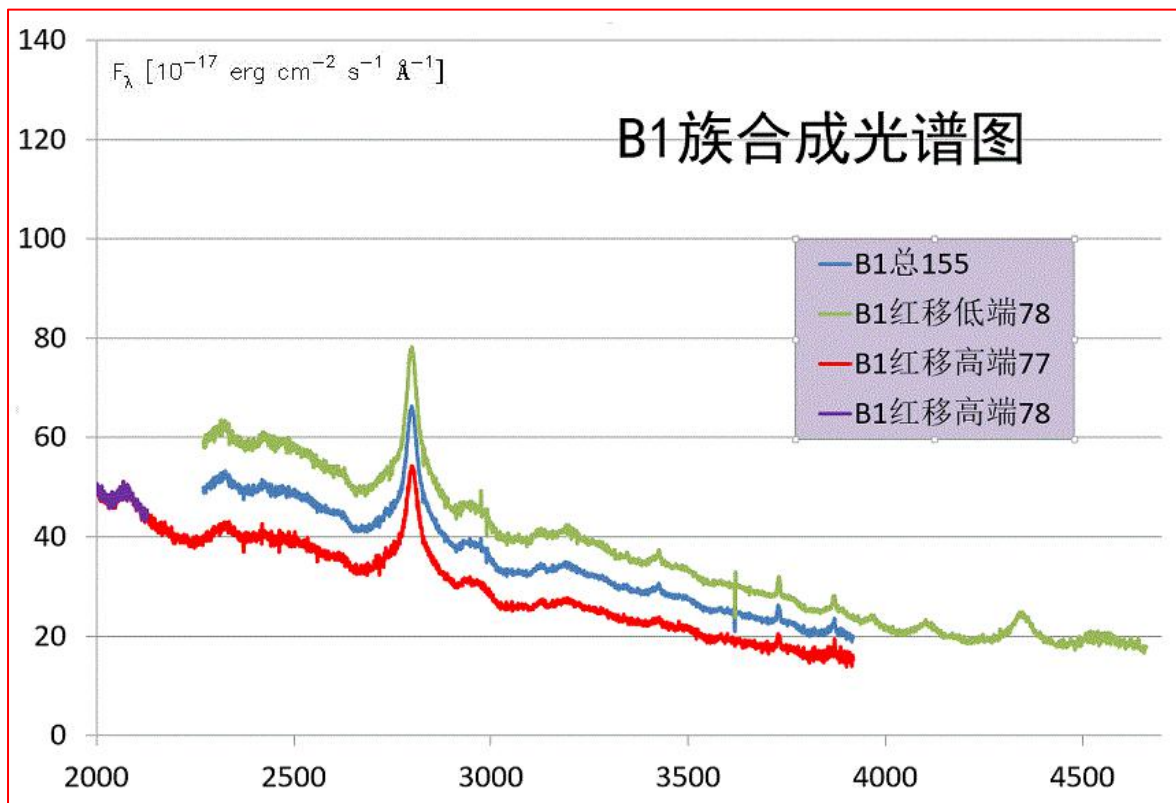


图 7 B1 族合成光谱图

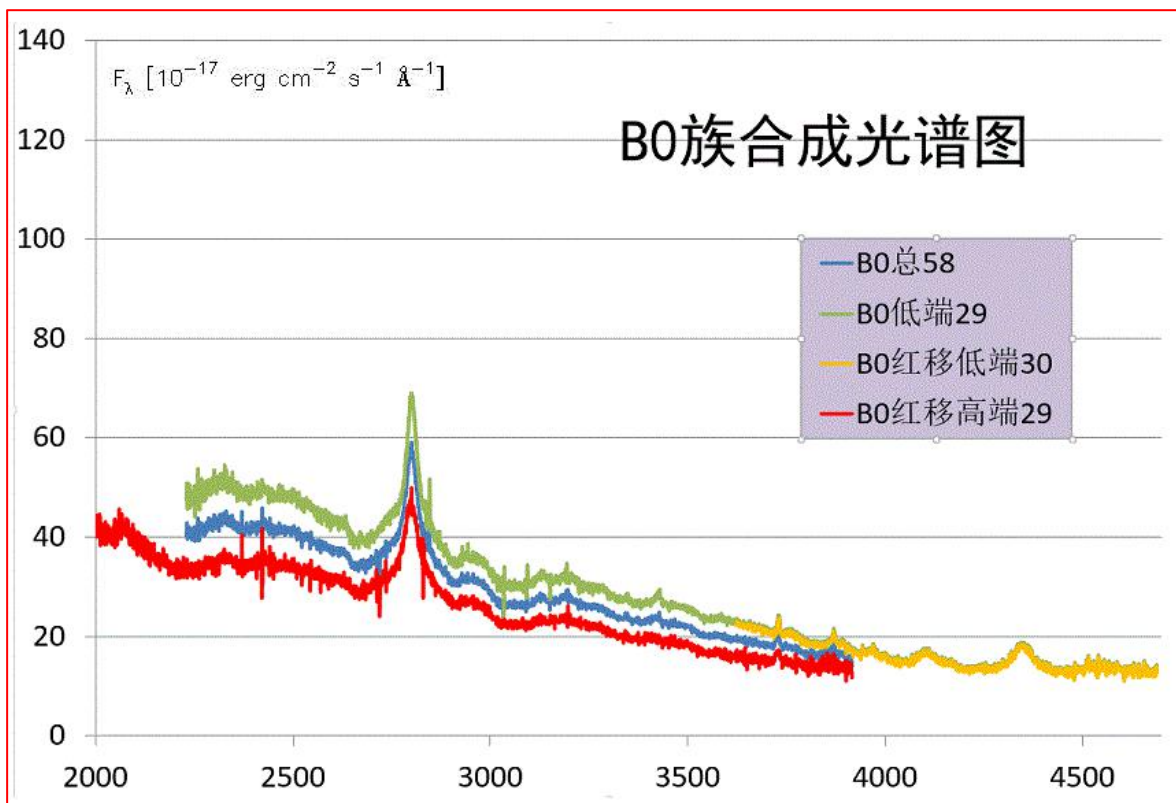
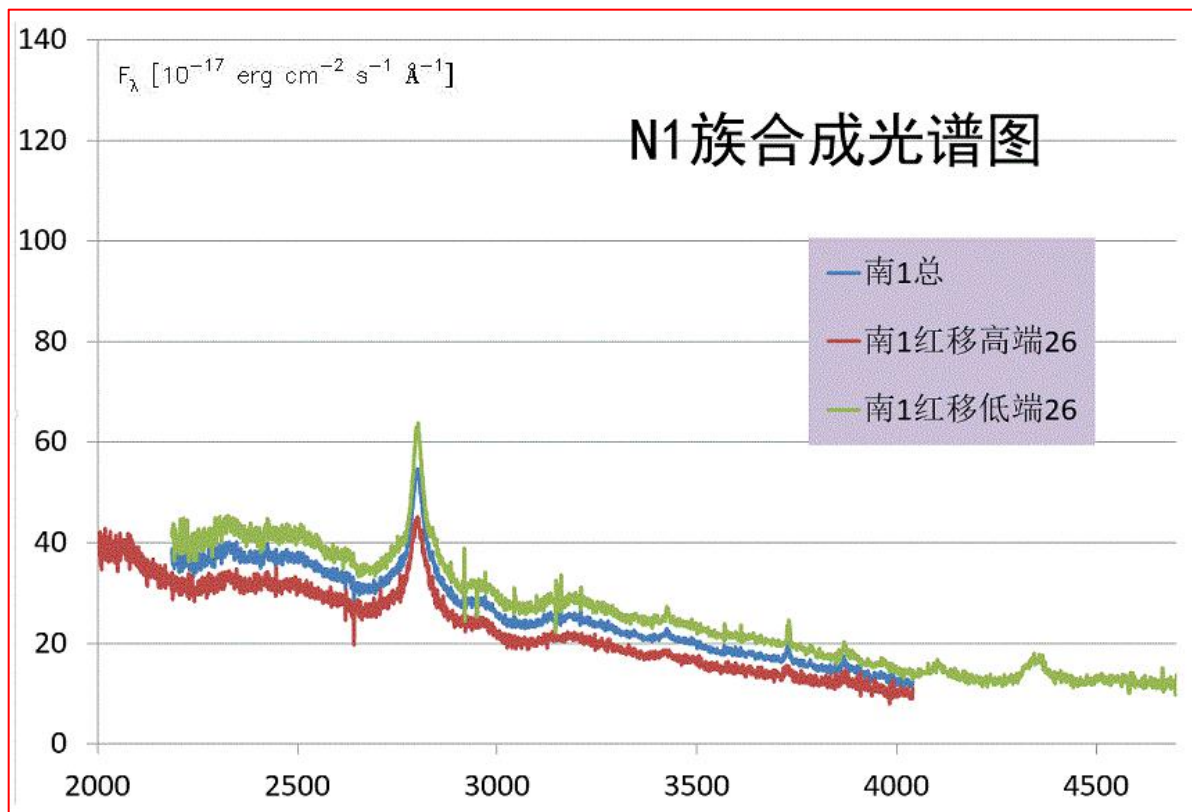
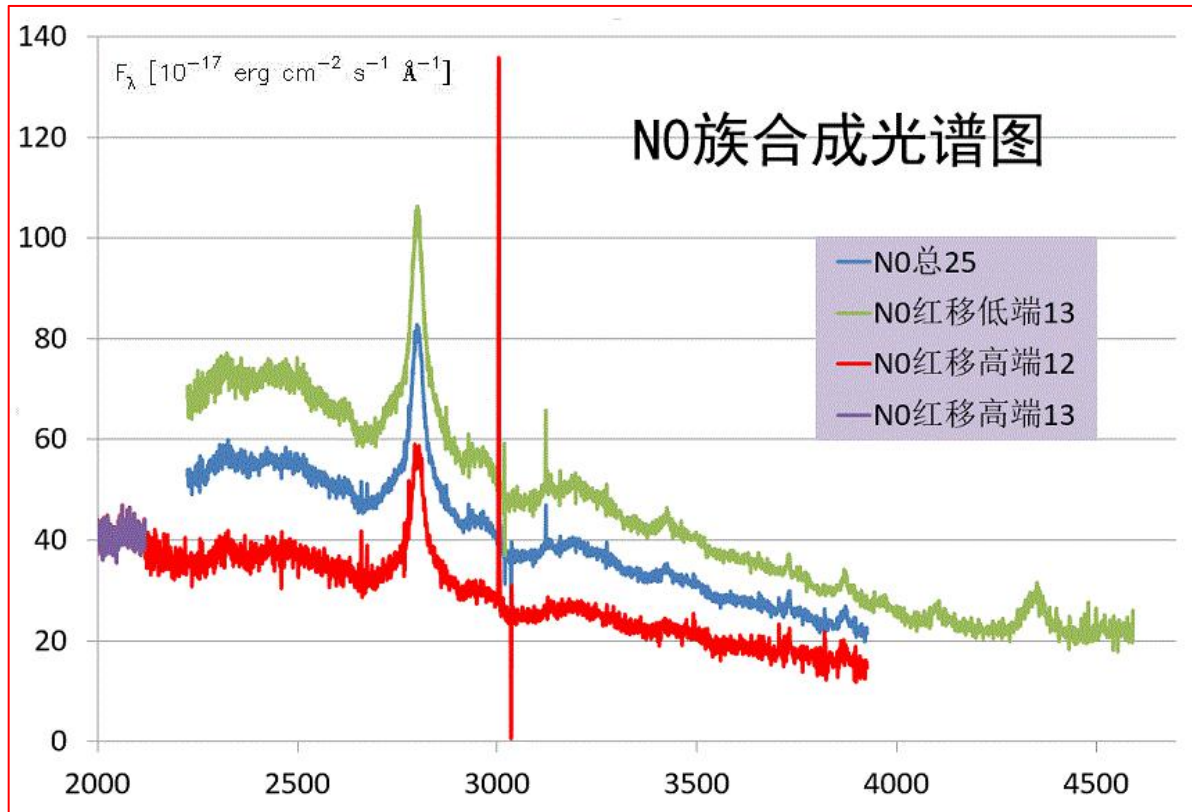


图 8 B0 族合成光谱图



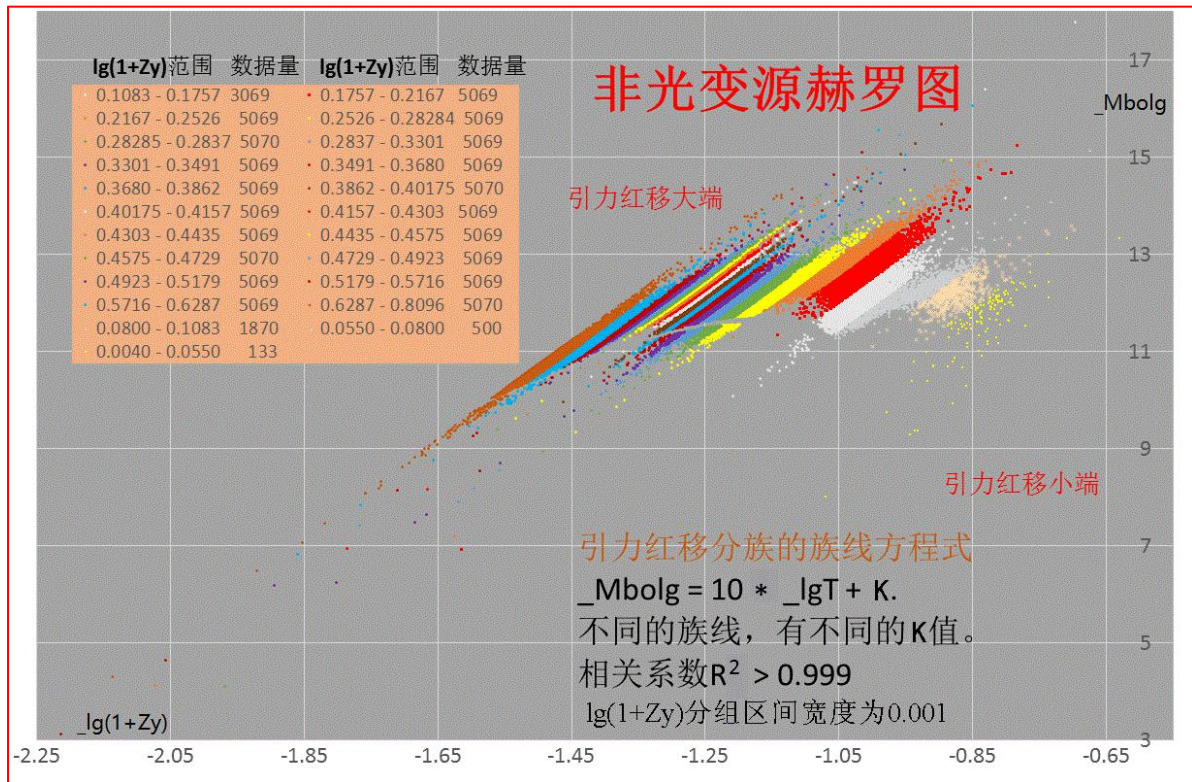


图 11 类星体在赫罗图上与引力红移相关的分族特性

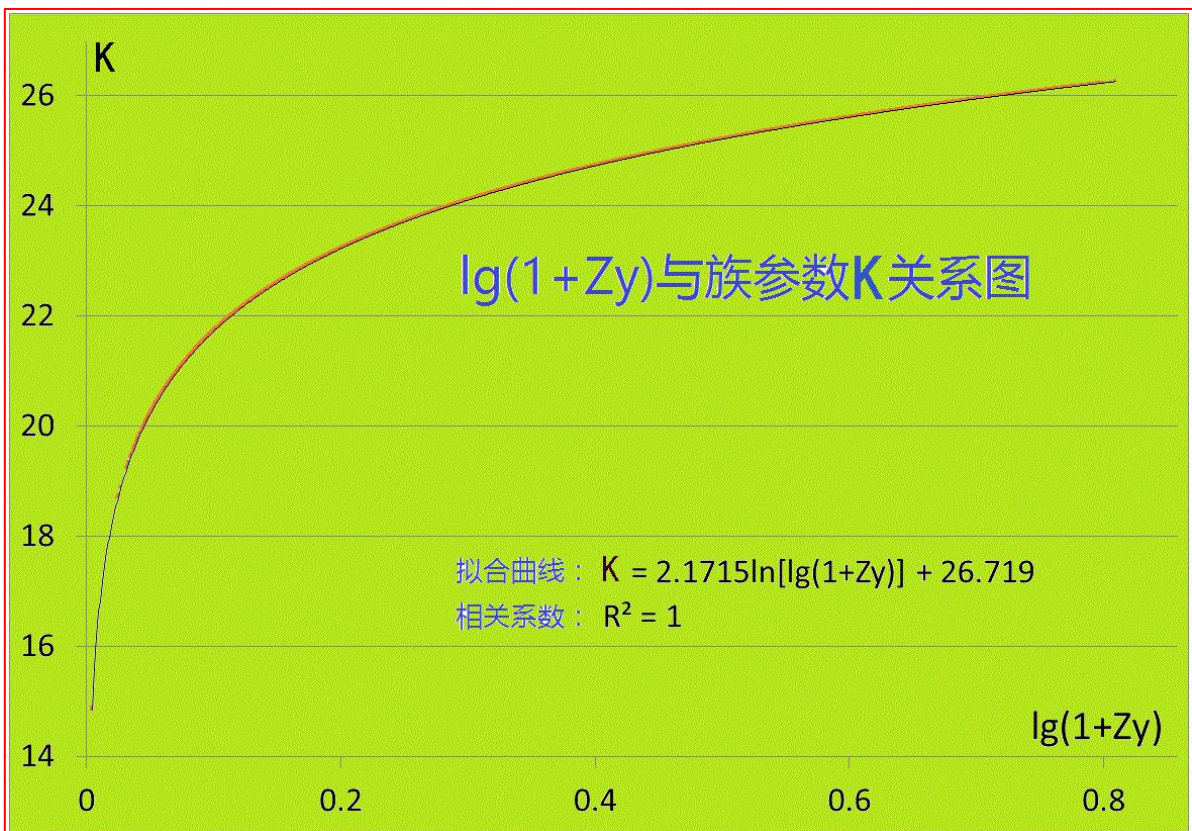


图 12 lg(1+Zy)与族参数 K 关系图

附录4 主要变量符号表

BC_1 红移热星等改正	r 距离
BC_2 热星等改正	r_0 以秒差距为单位的距离数
b 光子的能量损耗率	$r(\theta)$ 极坐标的模
b_1 距离公式常数	T 表面温度
b_2 距离分量因子公式常数	T_z 观测色温度
c 光速	v 粒子的速度
E 光子能量	v_0 粒子的初始速度
E' 观察到光子的能量	Z 红移量
E_0 光子初始能量	Zr 距离红移量
G 万有引力常数	Z_u 随机速度红移量 (负值为紫移)
H 哈勃常数	Z_y 引力红移量
h 普朗克常数	z 广义相对论定义的红移
L 光度	λ 光子波长
L_\odot 太阳光度	λ_0 光子初始波长
M 天体质量	μ 质光比
M_\odot 太阳质量	ν 光子频率
M_{bolg} 改正绝对热星等	ν_0 光子初始频率
$M_{bol\odot}$ 太阳的绝对热星等	ξ 距离红移分量因子
m 光子质量	ξ_i 小区间中点
m_{bol} 热视星等	K 族线的截距, 族参数
m_{bolg} 改正热视星等	\int 乘积分符号
m_0 光子初始质量	\int 微积开符号
pc 秒差距	d 微开符号
R 天体半径	\vee 微对数符号
R_\odot 太阳半径	\wedge 微根符号
$R(t)$ 人口函数	∇ 增率符号

鸣谢:

四十多年来,“微积开概念”的主文与附文及概念引成过程等征询了非常多专家、学者、朋友的意见,促使“微积开概念”完善。

本文的写作过程中先后征得了南京紫金山天文台**恒星室**老师,温州职业技术学院的**章绍东**老师,温州房产管理局的**王超俊**老师,温州电子技术研究所的**缪晓胜**老师,温州大学的**朱丰毅**老师,浙江大学应用数学教研组的**林主任**老师,温州师范大学物理教研组的**郑亦庄**老师,浙江大学应用数学教研组的**叶茂东**老师,温州计算机学会的**李桂芳**老师,温州建筑设计院的**翁庆华**老师,温州农工民主党的**李建敏**老师,清华大学数学教研组的一**教员**老师,温州大学的**徐正惠**老师,温州业余科技大学的**顾炎之**老师、**余进贤**老师,文成县人民医院的**夏镜清**老师,复旦大学的**谷超豪**老师,温州大学数学教研组的**徐承煌**老师,温州业余科技大学的**金来东**老师,复旦大学的**苏步青**办公室,温州教师进修学院数学教研组的**柳老师**,温州业余科技大学的**绍荣震**老师,温州大学数学教研组的**吴挺**老师,中国科技大学天体物理组**王挺贵**老师,上海第二医学院数学教研组的**苏炳华**老师、**郑一鸣**老师,温州医学院附一院的**谷定英**老师、**袁谦**老师,温州第十二中学的**王海丽**老师,新疆气象台的**张学文**老师,武夷山大学物理教研组的**师教民**老师,美国亚特兰大的**王海旭**老师、**刘可文**老师,温州大学的**王靖庶**老师、**黄明光**、**王胜初**老师,浙江省电力设备总厂的**张捷**老师,等老师的宝贵意见。感谢在网络论坛讨论中得到了网友**张玮**老师, **青春如歌**老师, **面粉厂**司务长老师, **环滁皆山也**老师, **燕博士**老师, **学海苇航**老师, **林安石**老师的宝贵意见。

还要感谢温州医学院的**缪天荣**老师,是他让我认识了**缪晓胜**老师、**朱丰毅**老师、**叶茂东**老师、**李桂芳**老师,是他给了我聆听**谷超豪**老师讲座的机会。还要感谢温州市图书馆的**柳树椿**老师,他不仅提供馆藏匿文献服务,还热心帮助联系有关专家。还要感谢温州电视台的**彭志华**老师热心帮助联系有关专家。还要感谢我在温州业余科技大学的**姜强**同学、**王剑波**同学、**王飞云**同学热心帮助联系有关专家。还要感谢温州离子注入技术研究所的**马俊**老师为我提供早期的计算机使用机时。还要感谢 SDSS、NED 等开放数据,感谢为这些数据热心付出的工作者与老师。还要感谢郭守敬望远镜的**李荫碧**老师为我提供了开放的观测数据。

特别要感谢南京紫金山天文台**恒星室**,给予我最早的反馈意见。特别要感谢**章绍东**老师四十多年来多次提出宝贵意见;在我产生微积开概念的初期,在他的影响下我开始学习高等数学,并后来考取了温州业余科技大学。特别要感谢**谷超豪**老师在访温时接见了,并聆听了他的《几何学、引力论和时空观念的变革》讲座。特别要感谢中国科技大学**天体物理组**,与我进行了半年左右的通信交流,并提出了量纲问题。特别要感谢**绍荣震**老师,他推荐我加入中国数学会运筹学会,让微积开概念在学会中作了交流。特别要感谢**苏炳华**老师,他最早指出微积开是新概念应予发表。特别要感谢**张学文**老师,他将我的微积开概念在潜科学网站上作了介绍。特别要感谢**师教民**老师,在他出版的著作中介绍了微积开的有关的讨论。

还要感谢我的家人:感谢我的**父亲**对我自幼的启蒙教育,感谢我的**母亲**对我成长的照顾,感谢我的**妻子**为我承担了更多的家务。

还要感谢未提及的很多曾帮助过我的人。

对以上所有我要感谢的人,谨在此表示衷心的感谢!

2016年8月8日 V2.2d 定稿于温州